

Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen

Rieder, Georg

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 12, 1960, S.4-65



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen.

Von Georg Rieder

Vorgelegt von Herrn H. Schaefer

(Eingegangen am 20. 6. 1960)

Summary: To solve elastic boundary value problems, displacement functions or stress functions may be used. In the first case the fulfilment of the compatibility condition is secured beforehand by deriving the strain field from a displacement, and the displacement function is adapted afterwards to the equilibrium condition; in the second case the derivation of the stress field from stress functions guarantees beforehand the fulfilment of the equilibrium condition, whilst the compatibility condition is to be satisfied by subsequent adaptation. The topological properties of displacement functions have been repeatedly studied from a geometric viewpoint, especially in connection with dislocation theory; the paper presented contains a corresponding study for stress functions from a static viewpoint. It is shown, that for the representability of the elastic field by stress functions in a space domain devoid of external forces and sources of internal stress (shortly: "unperturbed domain") the number of bordering surfaces plays the same role as does the connectivity for the representation by displacement functions. Especially a representation by stress functions is impossible in a multiply bordered domain, if the external forces are not in equilibrium on any single surface; this applies, for example, also for the isolated single force, which is to be regarded as the limiting case of an assembly of forces on an infinitely small hole. The stress functions given for this case in the plane and in space prove to be the stress functions of a state of internal stress, the singular stress sources of which are being omitted in deriving the stress field; intentional introduction of such "fictive extra stresses" renders possible the construction of more solutions of this kind. For multiply connected domains a relation known from the plane annular domain between the boundary conditions for zero stress functions and the conditions for vanishing Volterra states of distortion is extended into space. As examples stress functions are set up for the single force and a double force with a moment in the "pierced" full space, and Schaefer's stress functions for the problems of Boussinesq and Cerutti on the half space are derived by a different method.

Übersicht: Zur Lösung elastischer Randwertprobleme kann man sich der Verschiebungsfunktionen oder der Spannungsfunktionen bedienen. Im ersten Fall wird durch Ableitung des Dehnungsfeldes aus einer Verschiebung die Erfüllung der Kompatibilitätsbedingung von vornherein gesichert und die Verschiebungsfunktion nachträglich der Gleichgewichtsbedingung angepaßt; im zweiten Fall gewährleistet die Ableitung des Spannungsfeldes aus Spannungsfunktionen von vornherein die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung, während die Kompatibilitätsbedingung durch nachträgliche Anpassung befriedigt werden muß. Die topologischen Eigenschaften der Verschiebungsfunktionen sind nach geometrischen Gesichtspunkten schon mehrfach gründlich untersucht worden, besonders im Zusammenhang mit der Theorie der Versetzungen; die vorliegende Arbeit enthält eine entsprechende Untersuchung nach statischen Gesichtspunkten für die Spannungsfunktionen. Es ergibt sich, daß für die Darstellbarkeit des elastischen Feldes durch Spannungsfunktionen in einem von äußeren Kräften und Eigenspannungsquellen freien (kurz: „störfreien“) räumlichen Bereich die Zahl der begrenzenden Oberflächen dieselbe Rolle spielt wie bei der Darstellung durch Verschiebungsfunktionen die Zusammenhangszahl. Insbesondere ist eine Darstellung durch Spannungsfunktionen beim mehrfach begrenzten Bereich unmöglich, wenn die äußeren Kräfte nicht an jeder Oberfläche für sich im Gleichgewicht sind, also z. B. auch für die als Grenzfall eines Kräftesystems am unendlich kleinen Hohlraum aufzufassende isolierte Einzelkraft. Die für diesen Fall in der Ebene und im Raum angegebenen Spannungsfunktionen erweisen sich als Spannungsfunktionen eines Eigenspannungszustandes, dessen singuläre Eigenspannungsquellen bei der Ableitung des

Spannungsfeldes ausgespart werden; die bewußte Einführung solcher „fiktiver Extra-spannungen“ ermöglicht die Konstruktion weiterer derartiger Lösungen. Bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen wird eine vom ebenen Ringgebiet bekannte Beziehung zwischen den Randbedingungen für die Nullspannungsfunktionen und den Bedingungen für das Verschwinden eines *Voltterraschen* Distorsionszustandes ins Räumliche erweitert. Als Beispiele werden Spannungsfunktionen für die Einzelkraft und eine Doppelkraft mit Moment im „angebohrten“ Vollraum aufgestellt und die *Schaejerschen* Spannungsfunktionen für die Probleme von *Boussinesq* und *Cerutti* am Halbraum auf anderem Wege abgeleitet.

1. Einleitung. Topologische Grundbegriffe

a) Problemstellung und Schreibweisen

Ziel dieser Arbeit ist die Gegenüberstellung der topologischen Eigenschaften der Lösung elastischer Probleme durch Spannungsfunktionen und Verschiebungsfunktionen, wie sie sich in allgemeingültiger Form unmittelbar aus der Geometrie und aus der Statik des allgemeinen elastischen Kontinuums ergeben. Wir betrachten die Lösung in einem zusammenhängenden räumlichen Gebiet des Kontinuums, in dessen Innern weder äußere Kräfte angreifen noch irgendwelche Eigenspannungsquellen [2, 30, 31] liegen. Im übrigen mögen die elastischen Eigenschaften in diesem Gebiet beliebig anisotrop und von Ort zu Ort veränderlich sein; es wird nur vorausgesetzt, daß die quadratische Form der elastischen Energie darin überall positiv definit sei. Ein solches Gebiet und die elastischen Spannungs- und Dehnungsfelder in seinem Innern soll „störungsfrei“ genannt werden*). Spezielle Lösungen in speziellen Koordinatensystemen treten in diesem Zusammenhang in den Hintergrund und werden nur als Beispiele behandelt. Deshalb wird hier für die Vektor- und Tensorgleichungen meist die koordinatenfreie symbolische Schreibweise [9] verwendet, welche derartigen Untersuchungen am besten angepaßt erscheint**).

Im einzelnen werden Vektoren durch deutsche Buchstaben oder durch Überstreichen mit einem Pfeil bezeichnet, Tensoren 2. Stufe durch unterstrichene griechische Buchstaben. Dazu kommen noch die Tensoren 4. Stufe ϵ und s der Elastizitätskonstanten bzw. Elastizitätskoeffizienten und der Einheitstensor I der 2. Stufe. In rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten mit Summationsvereinbarung bedeuten

$$\begin{aligned}
 \alpha \cdot b &\equiv \alpha_i b_i && \text{das skalare Produkt der Vektoren} \\
 &&& \alpha = (\alpha_i) \quad \text{und} \quad b = (b_i) \\
 \alpha \times b &\equiv (\epsilon_{ijk} \alpha_j b_k) && \text{das vektorielle Produkt} \\
 \alpha b &\equiv (\alpha_i b_j) && \text{das dyadische Produkt} \\
 \tilde{\beta} &\equiv (\beta_{ji}) && \text{den zu } \underline{\beta} \equiv (\beta_{ij}) \text{ transponierten Tensor} \\
 \underline{\mu} \cdot \underline{\nu} &\equiv \mu_{ij} \nu_{ji} && \text{das doppeltskalare Produkt.}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

*) Mit den an anderer Stelle und in anderem Zusammenhang definierten beweglichen Störungen [33, 34] hat diese Bezeichnung nichts zu tun.

**) Lösungen für das isotrope Medium in allgemeinen Koordinaten finden sich bei *Brdicka* [29]. Über allgemeine Spannungsfunktionen vgl. die zusammenfassende Arbeit von *Truesdell* [27].

I als Index kennzeichnet den ersten Skalar eines Tensors. Die Stellung des symbolischen ∇ -Vektors in der Formel wird durch die Regeln der Vektormultiplikation bestimmt; differenziert werden dabei ohne Rücksicht auf die Reihenfolge sämtliche Glieder desselben skalaren, vektoriellen oder dyadischen Produktes einschließlich untergeordneter Klammern. Dagegen unterbricht eine übergeordnete Klammer oder das Zeichen der doppelt-skalaren Multiplikation die differenzierende Wirkung, soweit nicht durch Pfeilverbindung eine Abweichung von dieser Regel kenntlich gemacht wird. Auch dann, wenn ein einzelner zu differenzierender Faktor durch einen senkrechten Pfeil markiert ist, soll die Differentiation der anderen Faktoren unterbleiben.

Über die analytische Natur der auftretenden Funktionen soll nur vorausgesetzt werden, daß sie eindeutig und bis auf isolierte Ausnahmestellen genügend oft differenzierbar seien, und daß die Ausnahmestellen so beschaffen sein sollen, daß man sie durch differenzierbare Funktionen beliebig gut annähern kann. Das heißt, es sind insbesondere auch isolierte Sprungstellen, Einfach- und Doppelbelegungen usw. zugelassen, zu deren exakter analytischer Behandlung *Schwartz* [28] in der Theorie der Distributionen die Grundlagen geschaffen hat. Zwischen der Differentiation „guter“ Funktionen und den entsprechenden Operationen an Distributionen wird im folgenden nicht unterschieden; es ist selbstverständlich, daß die Zulässigkeit dieser Operation in jedem Einzelfall noch besonders zu prüfen ist*). Entsprechende Voraussetzungen sollen auch für die Begrenzungsflächen des räumlichen Bereichs gelten [36].

Über die physikalische Ursache der Spannungen in dem betrachteten räumlichen Bereich wird — außer der Einschränkung auf statische Probleme — nichts vorausgesetzt. Die Begrenzung des störungsfreien Bereichs kann mit der Oberfläche eines elastischen Körpers identisch sein; ebenso gut kann es sich aber auch um einen störungsfreien Ausschnitt aus einem größeren oder sogar unendlichen elastischen Körper handeln. Die Spannungen im betrachteten Bereich können als Lastspannungen von äußeren Kräften oder auch als Eigenspannungen von Eigenspannungsquellen in anderen Teilen des Körpers herühren.

b) Spannungsfunktionen und Vektorpotential

Die nacheinander von *Gwyther*, *Finzi* [27] und *Krutkow* [29] unabhängig gefundene Ableitung des Spannungsfeldes $\underline{\sigma}$ ($\underline{\sigma}$ ist der Ortsvektor)

$$\underline{\sigma} = \nabla \times \underline{\chi} \times \nabla \equiv \text{Ink } \underline{\chi} \quad (1.2)$$

sichert die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} \equiv \text{Div } \underline{\sigma} = 0 \quad (1.3)$$

*) Eine andere Methode zur Behandlung topologischer Fragen geht von den Eigenschaften einer speziellen Funktionenklasse aus (*Slobodianskii* [32]). Dieser Weg führt zu weitergehenden Aussagen bei speziellen Lösungstypen, ist aber weniger allgemein und läßt die Beziehungen zur Statik und Geometrie weniger deutlich hervortreten.

bei Abwesenheit äußerer Kräfte im ganzen Gültigkeitsbereich von (1.2)*). Falls nun die Oberfläche dieses räumlichen Bereichs nicht schon mit der Oberfläche des elastischen Gesamtkörpers identisch ist, denke man sich den Bereich herausgeschnitten und auf der neuen Oberfläche die zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts erforderlichen Kräfte angebracht. Dann gilt für die Kraft $d\vec{P}$ auf ein durch den senkrecht nach außen zeigenden Vektor $d\mathbf{f}$ dargestelltes infinitesimales Flächenstück

$$d\vec{P} = d\mathbf{f} \cdot \underline{\sigma} = d\mathbf{f} \cdot \text{Ink } \underline{\chi} = d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \underline{\chi} \times \nabla) \quad (1.4)$$

und nach Stokes für die Kraft \vec{P} auf ein endliches, einfach berandetes und einfach zusammenhängendes Stück der Oberfläche

$$\vec{P} = \int d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \underline{\chi} \times \nabla) = \oint d\mathbf{r} \cdot \underline{\chi} \times \nabla. \quad (1.5)$$

Nun ergibt sich nach einer bekannten Schlußweise der Vektoranalysis das Verschwinden der Gesamtkraft auf eine einfach zusammenhängende Oberfläche, wenn man den Integrationsumlauf auf einen regulären Punkt der Oberfläche zusammenziehen kann, in dem auch die Spannungsfunktionen differenzierbar sind. Ein solcher Punkt muß aber nach unseren Voraussetzungen stets existieren. Bei mehrfach zusammenhängenden Oberflächen benützt man die Möglichkeit, mit Hilfe der kanonischen Zerschneidung die ganze Oberfläche in ein einfach berandetes, einfach zusammenhängendes Flächenstück zu verwandeln [4]. Bildet man nun das Umlaufintegral über diesen Rand, so wird die Schnittkurve nacheinander in verschiedener Richtung durchlaufen (vgl. z. B. Abb. 8a, S. 29); das Umlaufintegral muß also unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Differenzierbarkeit auf der Schnittkurve verschwinden. Die Resultierende aller Kräfte auf eine Begrenzungsfläche ist somit bei Gültigkeit von (1.2) Null, unabhängig von der Zusammenhangszahl der Begrenzungsfläche.

Für das Moment der an einem einfach berandeten und einfach zusammenhängenden Teilstück der Oberfläche angreifenden Kräfte gilt nach Peretti [22] und Günther [13]

$$\begin{aligned} \vec{M} &= - \int d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \underline{\chi} \times \nabla) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= - \oint d\mathbf{r} \cdot \{ \underline{\chi} + (\underline{\chi} \times \nabla) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \} \end{aligned} \quad (1.6)$$

wobei \mathbf{r}_0 der Ortsvektor des beliebig gewählten, festen Momentenbezugspunktes ist. Daraus folgt mit derselben Argumentation wie oben das Verschwinden des resultierenden Momentes, insgesamt also das Verschwinden der resultierenden Dyname an jeder geschlossenen Oberfläche eines räumlichen Bereichs, in welchem (1.2) gilt. M. a. W.: Ein durch (1.2) darstellbares Spannungsfeld kann keine resultierende Kraft und kein resultierendes Moment zwischen zwei getrennten, in sich geschlossenen Oberflächen desselben elastischen Körpers übertragen.

*) Zur Einführung der Differentialoperatoren Ink, Def, Div und Rot vgl. Kröner [2].

Das Analogon in der Theorie der Vektorfelder bildet der quellenfreie Strömungsvektor $\mathbf{v}(\tau)$ einer inkompressiblen Flüssigkeit, welcher sich bekanntlich [35] stets als Rotor eines Vektorpotentials \mathfrak{B} darstellen läßt:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathfrak{B}. \quad (1.7)$$

Hier gilt für jede geschlossene Oberfläche unabhängig von der Zusammenhangszahl

$$\oint d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.8)$$

Das heißt, die Ergiebigkeit aller von einer geschlossenen Oberfläche umgebenen Quellen muß verschwinden, und es kann durch ein nach (1.7) darstellbares Strömungsfeld zwar Flüssigkeit zwischen verschiedenen Oberflächen desselben räumlichen Bereichs ausgetauscht, aber keine zusätzliche Flüssigkeitsmenge zu- oder abgeführt werden.

Das entscheidende topologische Kriterium für (1.2) und (1.7) ist also die Anzahl der begrenzenden Oberflächen eines räumlichen Bereichs, unabhängig von der Zusammenhangszahl.

c) Verschiebungsfunktionen und Potential

Bekanntlich [1, 9, 26] wird durch die Ableitung der (elastischen) Dehnung $\underline{\varepsilon}$ aus dem Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\tau)$ durch

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla) \equiv \text{Def } \mathbf{u} \quad (1.9)$$

die Erfüllung der Kompatibilitätsbedingungen

$$\underline{\eta} = \text{Ink } \underline{\varepsilon} \equiv \nabla \times \underline{\varepsilon} \times \nabla = 0 \quad (1.10)$$

gewährleistet*), ähnlich wie in der Theorie der Vektorfelder der Ansatz

$$\mathbf{v} = \nabla V \quad (1.11)$$

die Wirbelfreiheit

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (1.12)$$

sichert [9, 15, 35]. Nun gewährleistet umgekehrt die Erfüllung von (1.12) nur im einfach zusammenhängenden Bereich die Erfüllung von (1.11), während im mehrfach zusammenhängenden Bereich das Potential V u. U. mehrwertig, d. h. nicht in physikalisch sinnvoller Weise definierbar sein kann. Die Anzahl der begrenzenden Oberflächen spielt keine Rolle bei dem topologisch entscheidenden Beweisschritt, nämlich dem Aufspannen einer einfach zusammenhängenden Fläche ganz im Innern über dem betrachteten Integrationsumlauf; bei einfachem Zusammenhang kann man (vgl. Abb. 2) stets sämtliche Begrenzungsflächen umgehen und das Außengebiet vermeiden, während dies bei mehrfachem Zusammenhang nicht für jede geschlossene Kurve möglich ist (Abb. 1).

Entsprechendes gilt für Dehnung und Verschiebung [1, 2, 3, 6, 8, 21, 30, 31, 43] u. a. Die Gleichung (1.10) gewährleistet nur für einfach zusammenhängende Bereiche die Existenz einer eindeutigen, also physikalisch sinnvollen und ohne

*) Die Unterscheidung zwischen elastischer, Gesamt- und Extradehnung [5, 6, 7] entfällt — bis auf die noch zu besprechenden Ausnahmen — im störungsfreien Bereich. Daher kann die besondere Kennzeichnung der elastischen Dehnung vorläufig unterbleiben.

Schnittoperationen realisierbaren Verschiebung. Das entscheidende topologische Kriterium für (1.9) und (1.11) ist also die Zusammenhangszahl des räumlichen Bereichs, unabhängig von der Anzahl der begrenzenden Oberflächen.

d) Topologische Grundbegriffe und Grundoperationen

Die für das vorliegende Problem wesentlichen topologischen Kennzeichen eines begrenzten oder auch ins Unendliche erstreckten räumlichen Bereichs sind nach dem Obigen die Zusammenhangszahl und die Begrenzungszahl. Einfach zusammenhängend und einfach begrenzt soll ein räumlicher Bereich heißen, wenn man jede beliebige geschlossene Kurve des Außengebiets auf einen Punkt zusammenziehen kann, ohne das Innengebiet zu durchschneiden, und wenn sich gleichzeitig zwei beliebige Punkte des Außengebiets in einen einzigen Punkt zusammenschieben lassen, ohne dabei das Innengebiet zu durchstoßen.

Als Zusammenhangszahl eines beliebigen räumlichen Bereichs definieren wir die um eins vermehrte Anzahl geschlossener Kurven („Umläufe“) im Außengebiet, die sich ohne eine Durchschneidung des Innengebiets weder mit einer anderen geschlossenen Kurve zusammenschieben noch auf einfachere Umläufe aufteilen oder auf einen Punkt zusammenziehen lassen („irreduzible Umläufe“). Als Beispiel eines zweifach zusammenhängenden Bereichs ist in Abb. 1 der Voll-



Abb. 1. Zweifach zusammenhängender Bereich mit zwei geschlossenen Kurven im Außenraum

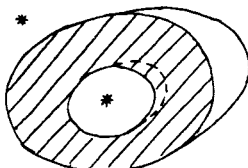


Abb. 2. Zweifach begrenzter Bereich mit zwei Punkten im Außenraum (Querschnitt)

Torus gezeichnet. Wie man durch Vergleich mit der Topologie geschlossener Flächen [4, 37] erkennt, wird ein einfach begrenzter, $(n+1)$ -fach zusammenhängender räumlicher Bereich von einer Fläche vom Geschlecht n und der Zusammenhangszahl $2n+1$ begrenzt („Brezel“); die Zusammenhangszahl des Innengebiets ist gleich der des Außengebiets, im Beispiel von Abb. 1 also gleich der des „unbegrenzten“ unendlichen Mediums mit Hohltorus.

Als Begrenzungszahl eines beliebigen räumlichen Bereichs definieren wir die Anzahl von Punkten im Außengebiet, die sich nicht in einen einzigen Punkt zusammenschieben lassen, ohne daß dabei das Innengebiet durchstoßen wird. Als Beispiel ist in Abb. 2 ein zweifach begrenzter Bereich gezeichnet; er ist offensichtlich nach obiger Definition einfach zusammenhängend, denn sämtliche geschlossenen Kurven im Außen- und auch im Innengebiet lassen sich auf einen Punkt zusammenziehen. Offenbar ist die Begrenzungszahl auch gleich der Zahl der begrenzenden geschlossenen Oberflächen. Eine Vertauschung von Außen- und Innengebiet ist aber in diesem Fall nicht möglich, da für eine sinnvolle Anwendung das Innengebiet zusammenhängend sein muß in dem Sinne,

daß zwei beliebige Punkte des Innengebiets ineinander überführbar sein müssen auf einem Weg, der ganz im Innengebiet verläuft*).

Mehrfacher Zusammenhang und mehrfache Begrenzung können am selben räumlichen Bereich gleichzeitig auftreten, wie die Beispiele der Abb. 3 und 4 zeigen. Abb. 3a gibt außerdem ein für die Anwendungen besser geeignetes topologisches Bild des unendlichen Mediums mit Hohltorus, denn das unendliche elastische Medium tritt dort meist als Grenzfall des Innengebiets einer sehr großen, einfach zusammenhängenden Oberfläche auf**). Die Zusammen-

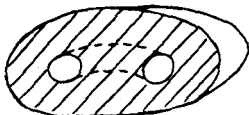


Abb. 3a. Zweifach begrenzter und zweifach zusammenhängender Bereich (Querschnitt)



Abb. 3b. Zweifach zusammenhängender und zweifach begrenzter Bereich (Querschnitt)

hangszahlen der einzelnen Begrenzungsflächen am selben Bereich sind offenbar voneinander unabhängig. Zur Bestimmung der Begrenzungszahl hat man einfach die geschlossenen Begrenzungsflächen abzuzählen, und zur Bestimmung der Zusammenhangszahl des ganzen Bereichs sind die Geschlechter der einzelnen Begrenzungsflächen zu addieren und das Ergebnis um Eins zu vermehren.

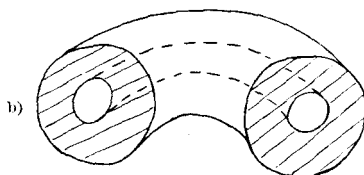
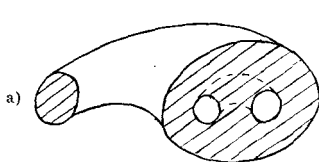
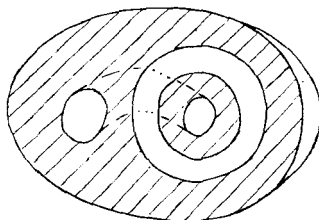


Abb. 4. Weitere Beispiele für mehrfache Begrenzung und mehrfachen Zusammenhang am selben Bereich
a, b) Zweifach begrenzt, dreifach zusammenhängend



c) Dreifach begrenzt, dreifach zusammenhängend

*) Die Unterscheidung zwischen mehrfach zusammenhängenden („cyklischen“) und mehrfach begrenzten („periphraktischen“) Bereichen findet sich bereits bei *Maxwell* ([44], S. 18).

**) Dies entspricht der topologischen Struktur des metrischen Raums ([4], S. 262).

Zur Verminderung der Begrenzungszahl hat man den Bereich aufzubohren und von einer Begrenzungsfläche zur anderen „Verbindungsschläuche“ zu ziehen; für die Reduktion auf einfache Begrenzung sind bei p -fach begrenztem Bereich offenbar $p-1$ Verbindungsschläuche erforderlich, unabhängig vom Zusammenhang der einzelnen Oberflächen. Zieht man nicht mehr als diese unbedingt notwendigen Verbindungsschläuche ein, so wird dadurch die Zusammenhangszahl nicht verändert; denn die alten irreduziblen Umläufe bleiben bestehen, und ein neuer könnte erst durch einen überzähligen Verbindungsschlauch eingeführt werden, der zwei bereits miteinander verbundene Grenzflächen noch einmal miteinander verbindet. Die geometrische Form der Verbindungsschläuche ist in weiten Grenzen beliebig; sie können, wie in Abb. 5, über einer singulären Fläche oder auch über einer singulären Linie zusammengezogen werden.

Hat man durch die Verbindungsschläuche die Begrenzungszahl des räumlichen Bereichs auf Eins reduziert, so entspricht seine Begrenzung topologisch einer Brezel vom Geschlecht n und dem Zusammenhang $2n+1$, wo n die Summe

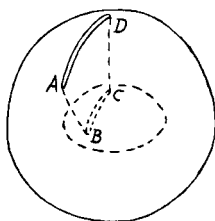


Abb. 5. Zweifach begrenzter Bereich mit abgeflachtem Verbindungsschlauch

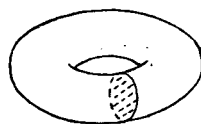


Abb. 6. Zweifach zusammenhängender Bereich mit Trennfläche

der Geschlechter der ursprünglichen Begrenzungsflächen ist; der räumliche Bereich ist dann nach unserer Definition $(n+1)$ -fach zusammenhängend. Er wird auf einfachen Zusammenhang reduziert durch n einfach zusammenhängende Trennflächen, welche über den irreduziblen Umläufen im Außengebiet aufgespannt werden, wie das Abb. 6 am Beispiel des Torus zeigt, und wie es auch aus der unter c) zitierten Literatur bekannt ist. Auch an den Beispielen von Abb. 3 und 4 ist nach dieser Vorschrift die Reduktion auf einfachen Zusammenhang und einfache Begrenzung leicht auszuführen; eine Erweiterung auf beliebig hohe Zusammenhangs- und Begrenzungszahl erscheint danach ohne weiteres möglich.

Die Bedeutung dieser topologischen Grundoperationen ist nach b) und c) einleuchtend. Für ein im gegebenen räumlichen Bereich quellen- und wirbelfreies Vektorfeld können bei mehrfachem Zusammenhang Wirbellinien im Außenraum die Ableitung aus einem Potential und bei mehrfacher Begrenzung nichtverschwindende Gesamtergiebigkeit der Quellen in einzelnen Teilen des Außenraums die Ableitung aus einem Vektorpotential unmöglich machen. Erst durch Reduktion auf einfachen Zusammenhang und einfache Begrenzung wird gleichzeitig die Ableitung aus einem Potential und aus einem Vektorpotential wenigstens in formaler Weise möglich. Entsprechendes gilt für ein im

gegebenen räumlichen Bereich störungsfreies Spannungs- und Dehnungsfeld. Bei mehrfachem Zusammenhang können Versetzungslinien 1. und 2. Art im Außenraum die Ableitung aus Verschiebungsfunktionen und bei mehrfacher Begrenzung Kräftesysteme mit nicht verschwindender Dynamie in einzelnen Teilen des Außengebiets die Ableitung aus Spannungsfunktionen unmöglich machen. Erst durch Reduktion auf einfachen Zusammenhang und einfache Begrenzung wird gleichzeitig die Ableitung aus Verschiebungsfunktionen und aus Spannungsfunktionen wenigstens in formaler Weise möglich.

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit Erläuterung, Beweis und Anwendung dieser Sätze.

2. Verschiebungsfunktionen und Spannungsfunktionen im einfach zusammenhängenden und einfach begrenzten Bereich

Aus der vorausgesetzten Existenz eines störungsfreien Spannungs- und Dehnungsfeldes wird seine Eindeutigkeit in bezug auf Randwertprobleme und die Existenz im wesentlichen eindeutiger Spannungs- und Verschiebungsfunktionen abgeleitet. Das Ergebnis wird mit bekannten Sätzen aus der Theorie der Vektorfelder verglichen.

a) Verschiebungsfunktionen und Potential

Mit dem Ansatz (1.9) für die elastische Dehnung ist die Kompatibilitätsbedingung erfüllt; zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung (1.3) durch die nach dem *Hookeschen* Gesetz aus der Dehnung zu berechnende Spannung

$$\underline{\sigma} = \underline{c} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (2.1)$$

muß die Verschiebung \underline{u} der Differentialgleichung

$$\text{Div} (\underline{c} \cdot \text{Def } \underline{u}) = 0 \quad (2.2)$$

genügen.

Wir beweisen die Eindeutigkeit von $\underline{\varepsilon} = \text{Def } \underline{u}$ gleich mit Einschluß des Falles, daß die Oberfläche des störungsfreien Bereiches nicht die Oberfläche des elastischen Körpers ist, sondern daß die Kräfte auf den störungsfreien Bereich über andere, durch Eigenspannungsquellen oder äußere Kräfte gestörte Teile des Gesamtkörpers übertragen werden. Schließen wir instabile Fälle aus, so gilt an der Bereichsoberfläche mit dem nach außen zeigenden Normaleneinheitsvektor \underline{n} als Gleichgewichtsbedingung die lineare Funktionalbeziehung

$$\oint \underline{C}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{u}(\underline{r}') d\underline{f}' - \underline{n} \cdot (\underline{c} \cdot \text{Def } \underline{u}) = 0, \quad (2.2a)$$

wobei für das Funktional die Ungleichung

$$\oint \oint \underline{u}(\underline{r}) \cdot \underline{C}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{u}(\underline{r}') d\underline{f} d\underline{f}' \geq 0 \quad (2.2b)$$

vorausgesetzt wird. Das Gleichheitszeichen soll nur dann gelten, wenn an jeder Stelle der Integrationsfläche entweder der Tensor 2. Stufe $\underline{C}(\underline{r}, \underline{r}')$ oder der Verschiebungsvektor \underline{u} verschwindet oder, falls der Restkörper nicht an irgendeiner Stelle im Raum fixiert ist, wenn das Verschiebungsfeld $\underline{u}(\underline{r})$ auf der Oberfläche einer starren Bewegung entspricht.

Wir berechnen nun nach dem *Gauss'schen Satz*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int u \cdot \operatorname{Div} (\underline{c} \cdot \operatorname{Def} u) d\tau + \frac{1}{2} \oint df u \cdot \{ \mathfrak{P}_0 - \oint \underline{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot u(\mathbf{r}') df' - n \cdot (\underline{c} \cdot \operatorname{Def} u) \} \\ = \frac{1}{2} \oint df \mathfrak{P}_0 \cdot u - \frac{1}{2} \oint \oint u, (\mathbf{r}) \cdot \underline{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot u(\mathbf{r}') df df' \\ - \frac{1}{2} \int \operatorname{Def} u \cdot \underline{c} \cdot \operatorname{Def} u d\tau. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Hier verschwindet die linke Seite nach (2.2) und (2.2a); auf der rechten Seite kann das doppelte Flächenintegral nach (2.2b) nicht negativ werden, und das Volumenintegral ist endlich und positiv, wo nicht $\operatorname{Def} u$ überhaupt verschwindet.

Setzt man nun in (2.3) an Stelle von u die Differenz u^- zweier Lösungen mit derselben Oberflächen-Kraftdichte \mathfrak{P}_0 ein, so verschwindet auf der rechten Seite das erste Integral nach (2.2a). Also muß auch im Innern des Bereichs $\operatorname{Def} u^-$ verschwinden, und es muß auf der Oberfläche für u^- wenigstens eine der Bedingungen erfüllt sein, unter denen in (2.2b) das Gleichheitszeichen gilt, w. z. b. w. Die übliche Randwertaufgabe „Oberflächenkräfte gegeben“ ist für $\underline{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ in diesem Beweis mit enthalten; die Erweiterung auf den Fall an der ganzen Oberfläche gegebener Verschiebungen ist trivial, und schließlich läßt sich der Beweis auch ohne Schwierigkeiten auf den Fall ausdehnen, daß in endlich vielen Teilflächen der Gesamtoberfläche entweder die Verschiebungen gegeben sind oder eine Randbedingung vom Typ (2.2a) gilt (vgl. [1], S. 170).

Verschwindet aber die Differenz $\operatorname{Def} u^-$, so muß auch der Differenzvektor u^- selbst bis auf eine starre Bewegung verschwinden, denn es gilt nach *Cesàro* ([1], S. 222)

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times [\nabla \times u^-]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \\ + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \{ \operatorname{Def} u^-(\mathbf{r}') + [\operatorname{Def} u^-(\mathbf{r}') \times \nabla'] \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \} \end{aligned} \quad (2.4)$$

(∇' bedeutet Differentiation nach der Integrationsveränderlichen \mathbf{r}'). Hier verschwindet der Integrand und damit das Integral, und es bleiben nur die Glieder vor dem Integral, die eine für die elastische Dehnung bedeutungslose starre Bewegung darstellen. Die Eindeutigkeit der Lösung u von (2.2) bezüglich des Randwertproblems bis auf eine starre Bewegung ist damit bewiesen.

Die räumliche Eindeutigkeit folgt aus dem Verschwinden der Inkompatibilität η (2.2). Zum Beweis setzen wir in die Formel von *Cesàro* (vgl. (2.4)) die elastische Dehnung $\underline{\varepsilon}$ ein und lassen die belanglosen Glieder vor dem Integral weg. Dann erhalten wir den Verschiebungsvektor

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \{ \underline{\varepsilon}(\mathbf{r}') + (\underline{\varepsilon}(\mathbf{r}') \times \nabla') \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \} \quad (2.5)$$

genau dann als existent und räumlich eindeutig, wenn jedes Umlaufintegral (2.5) mit $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ im störungsfreien Bereich verschwindet. Jedes solche Umlauf-

integral läßt sich aber nach dem *Stokesschen* Satz in ein Flächenintegral verwandeln; liegt \mathbf{r} auf dem Umlauf, so wird

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{r}) &= \oint d\mathbf{r}' \cdot \{ \underline{\varepsilon}(\mathbf{r}') + (\underline{\varepsilon}(\mathbf{r}') \times \nabla') \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \} \\ &= \int d\mathbf{f}' \cdot \{ \nabla' \times \underline{\varepsilon}(\mathbf{r}') + \underbrace{(\nabla' \times \underline{\varepsilon}(\mathbf{r}') \times \nabla') \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}_{\mathbf{0}} \} \quad (2.6) \end{aligned}$$

und nach einer im Anhang ausgeführten Umrechnung

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{f}' \cdot \underline{\eta}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \quad (2.7)$$

Nun läßt sich aber im einfach zusammenhängenden störungsfreien Bereich jede geschlossene Kurve mit einer ganz im Innern gelegenen einfach zusammenhängenden Fläche überspannen, und da dort gemäß (1.10) $\underline{\eta}$ verschwindet, muß auch $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ verschwinden. Die räumliche Eindeutigkeit von \mathbf{u} ist damit gewährleistet, w. z. b. w.

Anschaulich bedeutet die Voraussetzung (1.10), daß im Innern des störungsfreien Bereichs höchstens Versetzungsverteilungen nach Art der spannungsfreien *Nyeschen* Strukturkrümmungen vorkommen dürfen, an singulären Versetzungsbelegungen also nur Kleinwinkel-Korngrenzen 1. und 2. Art mit kristallographischen oder mit Quasi-Versetzungen [2, 31]*). In solchen Fällen bedeutet \mathbf{u} nicht mehr die Gesamtverschiebung, sondern nur den Beitrag der elastischen Dehnung zum Verschiebungsfeld.

Der analoge Fall in der Theorie der Vektorfelder, nämlich der Gradientenvektor, ist allgemein bekannt, so daß wir auf eine besondere Darstellung verzichten können.

b) Spannungsfunktionen und Vektorpotential

Mit dem Ansatz (1.2) für die (Gesamt-)Spannung ist die Gleichgewichtsbedingung (1.3) erfüllt; zur Erfüllung der Kompatibilitätsbedingung (1.10) durch die nach dem *Hookeschen* Gesetz aus der Spannung zu berechnende Dehnung

$$\underline{\varepsilon} = \underline{s} \cdot \underline{\sigma} \quad (2.9)$$

muß der Spannungsfunktionentensor $\underline{\chi}$ der Differentialgleichung

$$\text{Ink}(\underline{s} \cdot \text{Ink} \underline{\chi}) = 0 \quad (2.10)$$

genügen. Nun folgt die Eindeutigkeit von $\underline{\sigma} = \text{Ink} \underline{\chi}$ bereits aus der eben bewiesenen Eindeutigkeit von $\underline{\varepsilon} = \text{Def} \mathbf{u}$; trotzdem führen wir den Beweis für den Fall gegebener Oberflächenkräfte noch einmal gesondert durch, da die hierbei eingeführten Formeln und Begriffe an anderer Stelle wieder benötigt werden.

*) Solche Versetzungsverteilungen werden hier also — im Gegensatz zu den weitergehenden Fragestellungen der Theorie des *Cosseratschen* Kontinuums bzw. der Kontinuums-theorie der Gitterfehler [2, 6, 21, 30, 31, 33, 34] — nicht als Störungen angesehen.

Wir formen durch zweimalige Anwendung des *Gauss*schen Satzes um:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int \underline{\chi} \cdot \cdot [\text{Ink } (\underline{s} \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi})] d\tau \\
 &= \frac{1}{2} \oint \underline{\chi} \cdot \cdot [d\mathbf{f} \times (\underline{s} \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}) \times \nabla] \\
 &- \frac{1}{2} \oint (\underline{\chi} \times \nabla) \cdot \cdot [(\underline{s} \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}) \times d\mathbf{f}] \\
 &+ \frac{1}{2} \int \text{Ink } \underline{\chi} \cdot \cdot \underline{s} \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi} d\tau
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Die linke Seite verschwindet wegen (2.10), während auf der rechten Seite der Integrand des Volumenintegrals positiv und endlich ist, wo \underline{s} nicht ganz verschwindet.

Zur Untersuchung der Oberflächenintegrale knüpfen wir an die statische Deutung der Spannungsfunktionen $\underline{\chi}$ und $\underline{\chi} \times \nabla$ an, welche nach *Schaefer* [10] aufzufassen sind als Schnittmomente und Schnittkräfte am Schnitt mit dem vektoriellen Element $d\mathbf{r}$ in einer an die Stelle der Bereichsoberfläche gesetzten biegesteifen „Krustenschale“. Daraus ergibt sich auch zwanglos eine anschauliche Deutung der Formeln (1.5) und (1.6) von *Peretti* und *Günther*. Nun sei $\underline{\chi}^-$ die Differenz zweier Lösungen desselben Randwertproblems mit gegebenen Oberflächenkräften. Aus der Form von (1.5) und dem analogen Aufbau der Gleichungen (1.6) und (2.6—7) darf man nun schließen, daß es für das Verschwinden der Differenz-Oberflächenkräfte notwendig und hinreichend sein muß, daß sich $\underline{\chi}^-$ auf der Oberfläche, soweit das statisch erforderlich ist*),

*) Das bedeutet Einschränkung auf die Komponenten und Ableitungen, die in (1.5) und (1.6) auftreten. Andere Teile des Spannungsfunktionsensors kommen — außerhalb des Dehnungsgliedes $\underline{s} \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}$ — ersichtlich auch nicht in den Oberflächenintegralen von (2.11) usw. vor. Im einzelnen bedeutet dies, daß nur die Werte von

$$\mathbf{n} \times \underline{\chi} \tag{2.11a}$$

auf der Oberfläche durch die Statik bestimmt sind. Die durch die Statik bestimmten Ableitungen erhält man aus

$$\mathbf{n} \times \underline{\chi} \times \nabla. \tag{2.11b}$$

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich für ebene Grenzflächen durch die identische Umformung (es wird ausschließlich $\underline{\chi}$ differenziert)

$$\nabla = \nabla \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} - (\nabla \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}.$$

Daraus folgt nach kurzer Rechnung

$$\mathbf{n} \times \underline{\chi} \times \nabla = \mathbf{n} \times \underline{\chi} \times \mathbf{n} \cdot \nabla + \mathbf{n} \times \underline{\chi} \cdot (\mathbf{n} \times \nabla) \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \underline{\chi} \cdot \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{n}.$$

Hier sind alle Glieder bis auf das erste bereits mit den Randbedingungen für (2.11a) abgegolten; nur die Normalenableitungen für einen Ausschnitt

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{n} \times \underline{\chi} \times \mathbf{n} \tag{2.11b'}$$

sind also durch die Statik der Oberfläche bestimmt. Wir werden die Bedingungen für (2.11a—b) als „statische Randbedingungen“ bezeichnen. Hinzu kommt noch die Symmetrieforderung. Die Komponente $\mathbf{n} \cdot \underline{\chi} \cdot \mathbf{n}$ ist darin für ebene Grenzflächen überhaupt nicht enthalten.

mitsamt seinen ersten Normalableitungen wie ein Deformator verhält, so daß man schreiben kann

$$\underline{\chi}^- = \frac{1}{2}(\nabla \mathfrak{A}^- + \mathfrak{A}^- \nabla) \quad (2.12)$$

wobei \mathfrak{A}^- auf der Oberfläche eindeutig durch

$$\mathfrak{A}^-(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \{ \underline{\chi}^-(\mathbf{r}') + (\underline{\chi}^-(\mathbf{r}') \times \nabla') \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \} \quad (2.12a)$$

bestimmt ist. Die Normalableitungen kommen durch das letzte Glied von (1.6) mit ins Spiel. Nach (1.9) kann man auf der Oberfläche außerdem setzen

$$\underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^- = \frac{1}{2}(\nabla u^- + u^- \nabla). \quad (2.13)$$

Nun integriert man die Ausdrücke unter den Oberflächenintegralen von (2.11) über einen einfach zusammenhängenden Teil der Oberfläche und findet nach einer im Anhang ausgeführten Umrechnung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \underline{\chi}^- \cdot [\text{df} \times (\underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^-) \times \nabla] \\ & - \frac{1}{2} \int (\underline{\chi}^- \times \nabla) \cdot [(\underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^-) \times \text{df}] \\ & = \frac{1}{8} \oint d\mathbf{r} \cdot \{ -2(\text{Def } \mathfrak{A}^-) \cdot (\nabla \times u^-) + 2(\text{Def } u^-) \cdot (\nabla \times \mathfrak{A}^-) \\ & \quad + (\nabla \times \mathfrak{A}^-) \times (\nabla \times u^-) \}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da man den Integrationsumlauf auf einer einfach zusammenhängenden Oberfläche stets auf einen Punkt zusammenziehen kann, folgt daraus das Verschwinden der Oberflächenintegrale in (2.11) und damit die Eindeutigkeit des Spannungsfeldes $\sigma = \text{Ink } \underline{\chi}$ für die vorgelegte Randwertaufgabe.

Daß auch $\underline{\chi}$ selbst bis auf einen belanglosen Deformator eindeutig bestimmt ist, erkennt man durch eine Wiederholung derselben Schlußweise mit dem speziellen Tensor

$$\underline{s}^- = (s^-_{ijkl}) = (\delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (2.15)$$

mit welchem (2.10) in die bei verschwindendem $\underline{\sigma}^-$ sicher gültige Gleichung

$$\text{Ink } \text{Ink } \underline{\chi}^- = 0 \quad (2.16)$$

übergeht. Mit der Nebenbedingung

$$\nabla \cdot \underline{\chi}^- = 0 \quad (2.17)$$

wird daraus

$$\Delta \Delta \underline{\chi}^- = 0. \quad (2.18)$$

Die Erfüllung der Nebenbedingung (2.17) kann über die Randbedingungen gewährleistet werden; wegen $\underline{\sigma}^- = 0$ kann $\underline{\chi}^-$ auf der Oberfläche nur einem Deformator entsprechen, dessen Verschwinden mitsamt seinen Normalableitungen

die Erfüllung von (2.17) sichert. Damit verschwindet aber auch die ganze Spannungsfunktion χ samt Normalableitungen auf der Oberfläche, und es bleibt in kartesischen Koordinaten das homogene biharmonische Randwertproblem, dessen einzige Lösung bekanntlich Null ist.

Bevor wir nun zum Existenzbeweis für den Spannungsfunktionentensor übergehen, führen wir zunächst die analoge Aufgabe in der Theorie der Vektorfelder aus, nämlich den Existenzbeweis für das Vektorpotential eines quellenfreien Vektorfeldes \mathbf{v} , und zwar durch Konstruktion eines solchen Vektorpotentials. Da sich die Operation „rot“ nun in keiner Weise als Gradientenbildung darstellen läßt, ist eine Darstellbarkeit des Vektorpotentials als vom Wege unabhängiges Linienintegral von vornherein nicht zu erwarten. Sie ist in der Form von Linienintegralen höchstens dann möglich, wenn zu jedem Punkt auch der Integrationsweg eindeutig festgelegt ist (vgl. Aufg. 15, S. 109 bei *Phillips* [35]). Dadurch ist man aber von der Form des Bereiches abhängig, da diese Wege ganz im Innern verlaufen müssen. Wir benutzen daher einen anderen, ebenfalls von *Phillips* eingeschlagenen Weg, nämlich die Konstruktion des Vektorpotentials nach dem *Biot-Savartschen* Gesetz. Bekanntlich ist das Vektorpotential zu dem im unendlichen Raum quellenfreien Vektorfeld \mathbf{v}

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (2.19)$$

woraus man durch einfaches Ausdifferenzieren das *Biot-Savartsche* Gesetz erhält

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'. \quad (2.20)$$

Die Integration hat sich über den ganzen Raum zu erstrecken.

Ist ein quellenfreies Vektorfeld nur in einem endlichen Bereich definiert, und verschwindet seine Normalkomponente nicht an der ganzen Oberfläche, so hat man es quellenfrei in den Außenraum fortzusetzen oder, anschaulich ausgedrückt, die Stromröhren über das Außengebiet zu schließen. Dies kann, nach dem Vorschlag von *Phillips*, etwa durch quellen- und wirbelfreie Fortsetzung des Vektorfeldes ins Unendliche geschehen ([35], S. 196); zweckmäßiger für die vorliegenden Probleme ist jedoch die (vgl. Anhang) stets mögliche Einführung einer flächenhaft-singulären Schließungsströmung auf der Oberfläche; man braucht dann bei Verbiegung und topologischen Veränderungen nicht den ganzen Außenraum zu berücksichtigen.

Die entsprechende Aufgabe für ein (1.3) genügendes Spannungsfeld, nämlich die Bestimmung des zugehörigen Spannungsfunktionentensors χ , kann man durch zweimalige Anwendung von (2.20) lösen. Zunächst zerlegt man dazu σ nach konstanten Rechtsvektoren und erhält durch Berechnung der Vektorpotentiale der Linksvektoren nach (2.20) die unsymmetrische Spannungsfunktion 1. Ordnung

$$\varphi = \chi \times \nabla \quad (2.21)$$

und zwar im ganzen unendlichen Raum. Hat man bei dieser Rechnung für die Linksvektoren Schließungsströme auf der Oberfläche eingeführt, so springt dort der Spannungsfunktionentensor 1. Ordnung. Nun zerlegt man ihn nach

konstanten Linksvektoren und berechnet die Vektorpotentiale für die neuen Rechtsvektoren, woraus man den symmetrischen Spannungsfunktionentensor (2. Ordnung) $\underline{\chi}$ erhält. Da jetzt nicht mehr weiterintegriert wird, darf man das Feld der Spannungsfunktionen an der Oberfläche abschneiden und im Außengebiet gleich Null setzen. Beim Ausdifferenzieren führt diese Unstetigkeit an der Oberfläche auf einfache und doppelte singuläre Spannungsbelegungen, welche sich anschaulich als der Spannungszustand einer den ganzen Bereich einhüllenden, unendlich dünnen Schale deuten lassen, die an Stelle der weggefallenen Oberflächenkräfte den Spannungszustand im eingeschlossenen elastischen Körper aufrechterhält. Der Lastspannungszustand des von der Bereichsoberfläche eingeschlossenen elastischen Körpers ist also durch den Eigenspannungszustand des um die „Krustenhülle“ erweiterten elastischen Körpers ersetzt. Die Krustenhülle ist offenbar das elastische Analogon zu der singulären Oberflächenströmung in der Vektorthorie.

Wenn es gelingt, den Spannungszustand der Krustenhülle oder irgendeinen statisch gleichwertigen Schalenspannungszustand unmittelbar zu berechnen, so läßt sich auch die Berechnung des Spannungsfunktionentensors in einem einzigen Integrationsschritt ausführen. Man setzt dazu an

$$\underline{\chi} = \text{Ink } \underline{\psi} \quad (2.22)$$

mit der Nebenbedingung

$$\nabla \cdot \underline{\psi} = 0 \quad (2.23)$$

und erhält daraus die Gleichung

$$\Delta \Delta \underline{\psi} = \sigma \quad (2.24)$$

sofern σ symmetrisch ist und im ganzen Raum (1.3) erfüllt, was durch Hinzufügen des singulären Spannungszustandes der Krustenhülle erreicht werden kann. Man erhält die Lösung

$$\underline{\chi}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi} \text{Ink} \int |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \underline{\sigma}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.25)$$

oder nach Ausdifferenzieren und einer im Anhang wiedergegebenen Umrechnung

$$\begin{aligned} \underline{\chi}(\mathbf{r}) = & -\frac{1}{8\pi} \int \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\tilde{\underline{\sigma}}(\mathbf{r}') - \sigma_I(\mathbf{r}') \mathbf{I}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \underline{\sigma}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.26)$$

wobei natürlich wegen der Symmetrie des Spannungstensors

$$\tilde{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma} \quad (2.27)$$

ist.

Man kann die Krustenhülle als eine Art statisches Gegenbild der *Schaefer*-schen Krustenschale [10] auffassen; die Kräfte und Momente auf Krustenschale und Krustenhülle sind entgegengesetzt gleich. Während aber bei der Krustenschale neben den gewöhnlichen Spannungen auch die asymmetrischen

Spannungen und die Momentenspannungen des allgemeinen *Cosseratschen* Kontinuums [21] zugelassen und sogar erforderlich sind, da anders die Krustenschale den wirklichen elastischen Körper i. allg. nicht ersetzen kann, sind bei der nachträglich hinzugefügten Krustenhülle wegen des Ansatzes (1.2) nur Beanspruchungsgrößen zugelassen, die durch singuläre Einfach- und Doppelbelegungen mit symmetrischen Spannungen realisiert werden können. Im übrigen kann man die elastischen Eigenschaften der Krustenhülle beliebig annehmen. An der Existenz solcher singulärer Spannungszustände besteht nach den Bemerkungen im Anschluß an (2.21) kein Zweifel.

c) Zusammenfassung:

Ein störungsfreies Spannung- und Dehnungsfeld in einem einfach zusammenhängenden und einfach begrenzten räumlichen Bereich kann sowohl aus Verschiebungsfunktionen als auch aus Spannungsfunktionen abgeleitet werden, welche ihrerseits bis auf unwesentliche Anteile (starre Rotation bzw. Deformator) eindeutig bestimmt sind.

3. Verschiebungsfunktionen in mehrfach zusammenhängenden und mehrfach begrenzten Bereichen

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie weit die Eindeutigkeits- und Existenzbeweise von § 2 für Verschiebungsfunktionen für allgemeinere Bereiche modifiziert werden müssen. Im wesentlichen wird dabei Bekanntes wiederholt; die Sätze sollen jedoch zur Gegenüberstellung mit den Eigenschaften der Spannungsfunktionen noch einmal zusammengestellt und teilweise auch nach anderen Gesichtspunkten gedeutet werden.

Zunächst bleibt der Eindeutigkeitsbeweis (2.4) für den Verschiebungsvektor in bezug auf eine als Deformator vorgegebene elastische Dehnung unverändert bestehen, da auch hier wieder der Integrand verschwindet. Dagegen gilt der Eindeutigkeitsbeweis bezüglich des Randwertproblems nur noch für den Beitrag u^K der Oberflächenkräfte, wie sie entweder unmittelbar gegeben sind oder aus den vorgegebenen Verschiebungen an der Oberfläche bzw. der linearen Beziehung (2.1a) nachträglich bestimmt werden können. Denn selbst wenn sich die elastische Dehnung im ganzen störungsfreien Bereich formal nach (1.9) aus einem Vektorfeld u ableiten läßt, so braucht u doch nicht mehr die wirkliche Verschiebung zu sein, da seine räumliche Eindeutigkeit bei mehrfachem Zusammenhang nicht mehr gewährleistet ist. Das folgt aus (2.7) und der Existenz von Umläufen ganz im Innengebiet, die sich von keiner einfach zusammenhängenden Fläche mehr überspannen lassen, ohne daß diese das Außengebiet durchsetzt. Dort aber braucht (1.10) nicht erfüllt zu sein; also muß auch b (r) nicht verschwinden. u (r) kann also mehrdeutig sein; über die Art dieser Mehrdeutigkeit gibt eine einfache Umformung von (2.7)

$$b(r) = \int d\mathbf{f}' \cdot \underline{\eta}(r') \times r' + r \times \int [d\mathbf{f}' \cdot \underline{\eta}(r')] \quad (3.1)$$

Auskunft. Der erste Teil ergibt nach einem vollen Umlauf den konstanten „Verschiebungssprung“ des *Volterraschen* Distorsionszustandes 1. Art (gewöhnliche Versetzung), während der zweite die starre Drehung („Drehungssprung“) des *Volterraschen* Distorsionszustandes 2. Art wiedergibt, entsprechend einer Kleinwinkelkorngrenze im störungsfreien Bereich [2, 3, 30, 31, 43].

Der Verschiebungssprung stellt also das „Moment“, der Drehsprung die Summe aller die Fläche durchsetzenden Inkompatibilitätslinien dar; die Aufteilung des starren Bewegungssprungs auf Verschiebung und Drehung kann nach den Regeln der Kinematik durch Wahl des Koordinaten-Nullpunkts oder durch Einführung von $r-r_0$ an Stelle von r variiert werden.

Natürlich ist eine mehrwertige Verschiebung nicht realisierbar, also physikalisch sinnlos. Man löst den Widerspruch durch Einführung einer Extradehnung $\underline{\varepsilon}^Q$, welche die elastische Dehnung $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^E$ zu der aus einer wirklichen, einwertigen Verschiebung \underline{u}^G herzurechnenden Gesamtdehnung $\underline{\varepsilon}^G$ ergänzt [2, 5, 6, 7]:

$$\underline{\varepsilon}^G \equiv \text{Def } \underline{u}^G = \underline{\varepsilon}^Q + \underline{\varepsilon}^E. \quad (3.2)$$

Die Extradehnung kann bei genauer Kenntnis der Vorgeschichte des Materials (plastische Verformung, ungleichmäßige Erwärmung, Magnetisierung, Elektrisierung) ihrer physikalischen Ursache und Bedeutung nach genau angegeben werden*); da hier aber Spannung und elastische Dehnung allein interessieren, darf sie auch formal aufgefaßt und willkürlich um einen aus einem einwertigen Vektorfeld abzuleitenden Deformator verändert werden, solange sich nur ihr Verschiebungs- und Drehsprung gegen den der elastischen Dehnung weghebt, also für jeden Umlauf im ganzen störungsfreien Bereich gilt

$$\int d\mathbf{f}' \cdot (\nabla' \times \underline{\varepsilon}^Q(\mathbf{r}') \times \nabla') \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + \int d\mathbf{f}' \cdot \underline{\eta}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = 0, \quad (3.3)$$

wo die Integrale über eine vom Umlauf aufgespannte einfach zusammenhängende Fläche zu erstrecken sind.

Man löst nun an Stelle von (2.2) die Gleichung

$$\text{Div} [\underline{c} \cdot (\text{Def } \underline{u} - \underline{\varepsilon}^Q)] = 0 \quad (3.4)$$

mit der Oberflächenbedingung (vgl. (2.2a))

$$\mathbf{n} \cdot [\underline{c} \cdot (\text{Def } \underline{u} - \underline{\varepsilon}^Q)] = \mathfrak{P}_0 - \oint \underline{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \underline{u}(\mathbf{r}') d\mathbf{f}' \quad (3.4a)$$

und zieht dann zur Bestimmung von $\underline{\varepsilon}^E$ die Extradehnung $\underline{\varepsilon}^Q$ wieder ab. Am einfachsten geschieht dies, wenn man die Extradehnung überall gleich Null setzt bis auf eine singuläre Fläche nach Abb.6, S. 11, wo sie nach Art einer Diracschen Deltafunktion unendlich wird, und diese Fläche bei der Ableitung der Gesamtdehnung aus dem Verschiebungsfeld ausspart. Denn bis auf die singuläre Fläche ist dann die elastische Dehnung mit der Gesamtdehnung identisch.

Schafft man in (3.4) den Anteil

$$\mathbf{q} = -\text{Div} (\underline{c} \cdot \underline{\varepsilon}^Q) \quad (3.5)$$

bzw.

$$\mathfrak{Q} = \mathbf{n} \cdot (\underline{c} \cdot \underline{\varepsilon}^Q) \quad (3.5a)$$

auf die rechte Seite, so läßt er sich als „innere Kraftdichte“ auffassen [6] und an die Stelle von (2.2) tritt die inhomogene Differentialgleichung

$$\text{Div} (\underline{c} \cdot \text{Def } \underline{u}) = -\mathbf{q}, \quad (3.6)$$

*) I. allg. leistet die Extradehnung auch noch einen spannungsfreien Beitrag zur Gesamtverschiebung [2, 30, 31], der aber in diesem Zusammenhang nicht interessiert.

mit der Oberflächenbedingung

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{c} \cdot \text{Def } \mathbf{u}) = \mathfrak{Q} + \mathfrak{P}_0 - \oint_C (\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}') \, d\mathbf{f} \quad (3.6a)$$

Da diese Beziehungen linear sind, läßt sich der Beitrag der Oberflächenkräfte vom Beitrag des *Volterraschen* Distorsionszustands zum Spannungs- und Dehnungsfeld trennen; ebenso ist auch die Aufteilung in ein Summationsproblem im unendlichen Medium (inhomogene Differentialgleichung) und ein Randwertproblem (homogene Differentialgleichung mit Randbedingungen) stets möglich [2].

Unter Verwendung der inneren Kraftdichte haben *Duhamel* und *Neumann* bereits um 1840 das Wärmespannungsproblem gelöst ([2], S. 58). Zieht man die Extradehnung auf eine singuläre Fläche zusammen, so entartet die innere Kraftdichte zu einer Doppelbelegung; mit Hilfe dieser Vorstellung hat *Burgers* [2, 8] das Spannungsfeld eines Versetzungsringes bestimmt.

Durch mehrfache Begrenzung wird der Eindeutigkeitsbeweis bezüglich des Randwertproblems für die Verschiebung nicht beeinflusst, denn die Randbedingungen (2.2a) gelten auch an den Oberflächen der Hohlräume. Dasselbe gilt auch für den Beweis der räumlichen Eindeutigkeit, denn im einfach zusammenhängenden Bereich läßt sich auch bei mehrfacher Begrenzung jede von einem Umlauf berandete einfach zusammenhängende Fläche durch passende Deformation ganz in das Innengebiet verlegen.

Das Analogon aus der Theorie der Vektorfelder ist offensichtlich das Potential in einem mehrfach zusammenhängenden, quellenfreien Bereich, wo die Löcher der Brezel von Wirbelfäden durchzogen sein können. Die der Einführung einer singulären Extradehnung entsprechende Methode der magnetischen oder elektrischen Doppelschicht braucht hier nicht weiter ausgeführt zu werden.

4. Spannungsfunktionen in einfach zusammenhängenden, mehrfach begrenzten Bereichen

Setzt man zunächst einmal die Existenz eines Spannungsfunktionentensors voraus, so lassen sich die Eindeutigkeitsbeweise aus § 2 unverändert übernehmen; die Gleichungen (2.9) bis (2.18) gelten weiterhin für das Innengebiet und für jede einzelne Oberfläche, und der entscheidende topologische Beweisschritt, nämlich das Zusammenziehen der Integrationsumläufe auf einen Punkt, gilt wegen des einfachen Zusammenhangs für jede einzelne Oberfläche. Dagegen wird der Existenzbeweis durch die mehrfache Begrenzung gestört; eine Spannungsfunktion existiert nur, wenn die Kräfte an jeder einzelnen Oberfläche im Gleichgewicht sind. Trotzdem läßt sich stets eine — allerdings nur mit gewissen Einschränkungen verwendbare — Ersatzlösung angeben. Wir betrachten zunächst den analogen Fall aus der Theorie der Vektorfelder.

a) Vektorpotential im mehrfach begrenzten Bereich

Die Aufstellung eines Vektorpotentials nach (2.20) — und damit wegen der bekannten Eindeutigkeit bis auf einen Gradienten die Aufstellung eines Vektorpotentials überhaupt — ist nach § 2 nur dann möglich, wenn sich die Stromröhren über den Außenraum schließen lassen. Befindet sich aber z. B. eine

Punktquelle in einem Hohlraum, so ist diese Schließung über den Außenraum nicht mehr möglich: wenigstens eine singuläre Stromröhre muß den wirbel- und quellenfreien Bereich durchstoßen.

Beispiele sind leicht anzugeben. In der Ebene führt etwa das Vektorpotential in Polarkoordinaten ϱ, φ [15]

$$\mathfrak{B}_1 = \varphi \mathfrak{f} \quad (4.1)$$

auf das Strömungsfeld der ebenen Punktquelle

$$\mathbf{v}_1 = \text{rot } \mathfrak{B}_1 = \frac{1}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \quad (4.2)$$

in jedem beliebigen Ringgebiet um den Ursprung, mit Ausnahme einer Trennungslinie, in welche der zur Erhaltung der Einwertigkeit von \mathfrak{B}_1 erforderliche Sprung von φ zu legen ist. Im Strömungsbild ist diese Trennungslinie als singuläre Stromröhre zu deuten, welche den Rückfluß der durch das Ringgebiet hindurchgetretenen Flüssigkeit aufnimmt. Dasselbe Feld ist in räumlichen Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z [15] zu deuten als Strömung einer Linienquelle auf der z -Achse mit flächenhaft-singulärer Rückströmung. Ein anderes Vektorpotential zum selben Strömungsvektor ist

$$\mathfrak{B}'_1 = -\frac{z}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \quad (4.3)$$

Seine Singularität ist ein beiderseits aus dem Unendlichen kommender und auf den Nullpunkt zu dem Betrage nach linear abnehmender Wirbelfaden. Er stellt offensichtlich den Zufluß von den unendlich weit entfernten Zylinderenden dar, welcher sich zur Speisung der Linienquelle bis zur Mitte im Ursprung verbraucht. An diesem Beispiel zeigt sich die topologische Mehrdeutigkeit ebener Gebilde in räumlicher Betrachtung. Denn denkt man sich die Zylinderenden beiderseits geschlossen, so hat man doppelte Begrenzung; denkt man sie beiderseits offen, so hat man doppelten Zusammenhang. Man könnte sich das räumliche Gebilde sogar als einen einfach zusammenhängenden und einfach begrenzten Körper vorstellen, indem man das eine Zylinderende schließt und das andere öffnet, doch ist diese Betrachtungsweise praktisch ohne Bedeutung, zumal sie zu divergenten Vektorpotentialen führen würde.

In räumlichen Kugelkoordinaten r, φ, ϑ [15] führt das Vektorpotential

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{\cotg \vartheta}{r} \mathbf{e}_\varphi = \frac{z}{r \varrho} \mathbf{e}_\varphi \quad (4.4)$$

auf das Strömungsfeld der räumlichen Punktquelle

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (4.5)$$

in jedem Hohlkugelgebiet um den Ursprung (vgl. auch [35], Aufg. 13, S. 109). Die auszusparenden Singularitäten liegen auf der positiven und der negativen z -Achse, wie man aus der zweiten, aus Zylinder- und Kugelkoordinaten gemischten Form von (4.4) erkennt. Es sind singuläre Wirbelröhren verschiedenen Vorzeichens für das Vektorpotential, für den Strömungsvektor also singuläre Stromröhren, durch welche die Punktquelle gespeist wird. Beseitigt man

eine dieser Wirbelröhren zugunsten der anderen durch Addition eines Wirbelfadens längs der ganzen z -Achse, so liegt die Singularität des neuen Vektorpotentials zu (4.5)

$$\mathfrak{B}'_2 = \left(\frac{\cotg \vartheta}{r} + \frac{1}{\varrho} \right) \mathfrak{e}_\varphi \quad (4.6)$$

nur noch auf der positiven z -Achse. I. allg. muß zur Darstellung eines Gradienten in einem mehrfach begrenzten quellenfreien Bereich als Wirbel eines Vektorpotentials der Bereich so oft durchbohrt werden, daß die verschiedenen Oberflächen zu einer einzigen vereinigt werden. Durch die so geschaffenen Verbindungsschläuche können dann die Stromröhren geschlossen werden, soweit das nicht schon innerhalb der Einzelflächen möglich ist.

b) Spannungsfunktionen im mehrfach begrenzten Bereich

Der nicht verschwindenden Ergiebigkeit der Quellen in einem Hohlraum in der Theorie der Vektorfelder entspricht in der Elastizitätstheorie eine resultierende Dyname. Eine Darstellung durch Spannungsfunktionen ist nicht möglich, wenn sich nicht jede einzelne Oberfläche des störungsfreien Bereiches für sich im Gleichgewicht befindet; andernfalls ergibt sich ein Widerspruch, wenn man die Gedankengänge von § 1 b auf eine einzelne Oberfläche anwendet. Und auch der Existenzbeweis (2.21—27) versagt, da sich der störungsfreie Bereich bei mehrfacher Begrenzung nicht mehr von einer zusammenhängenden Krustenhülle umgeben läßt, ohne daß dabei das Innengebiet durchstoßen wird. Die Aufstellung eines Spannungsfunktionentensors, aus dem nach (1.2) die wirkliche Spannung folgt, ist also dann, und im allgemeinen nur dann möglich, wenn man vorher aus dem störungsfreien Bereich nach § 1 d eine ausreichende Anzahl von Verbindungsschläuchen ausspart (vgl. Abb. 5, S. 11). Der Eindeutigkeitsbeweis (2.11—18) gilt bei einfachem Zusammenhang unabhängig von der Begrenzungszahl, da sich die einzelnen Integrationsumläufe auf jeder Oberfläche auf einen Punkt zusammenziehen lassen; er wird erst durch mehrfachen Zusammenhang gestört (vgl. § 5). Dagegen ist der Existenzbeweis von der Zusammenhangszahl unabhängig.

Um nun einen Spannungsfunktionentensor im durchbohrten störungsfreien Bereich zu finden, machen wir Gebrauch von der Möglichkeit, die gegebenen äußeren Kräfte zu ersetzen durch fiktive innere Kräfte [5, 6, 7, 38], also durch die Divergenzvektoren eines fiktiven Extraspannungsfeldes $\underline{\sigma}^{K*}$. Diese fiktiven inneren Kräfte sind dann nicht in bezug auf die resultierende Gesamtspannung, wohl aber in Bezug auf die eintretende Verschiebung den wirklichen äußeren Kräften gleichwertig. Wir setzen dazu eine fiktive Gleichgewichtsspannung an

$$\underline{\sigma}^{G*} = \text{Ink } \underline{\gamma} \quad (4.7)$$

die mit der wirklich eintretenden Gesamtspannung $\underline{\sigma}^G$ verbunden ist durch die Beziehung

$$\underline{\sigma}^{G*} = \underline{\sigma}^{K*} + \underline{\sigma}^G. \quad (4.8)$$

$\underline{\sigma}^{G*}$ wird dann nach den für Eigenspannungsprobleme entwickelten Methoden berechnet (vgl. §§ 7 und 8) und $\underline{\sigma}^{K*}$ anschließend wieder abgezogen. Das Last-

spannungsproblem wird also durch ein fiktives Eigenspannungsproblem ersetzt*).

Nun gibt es zu jedem vorgegebenen Feld äußerer Kräfte unendlich viele fiktive Extraspannungsfelder; z. B. gehört dazu auch das wirklich auftretende Gesamtspannungsfeld σ^G mit umgekehrtem Vorzeichen; der praktische Vorteil dieser Hilfsgröße ist jedoch, bei guter Lösbarkeit des fiktiven Eigenspannungsproblems, daß man auch mit einfacheren Tensorfeldern auskommt. Da wir uns im vorliegenden Fall nur für den störungsfreien Bereich selbst interessieren, genügt es zunächst sogar, wenn die fiktiven inneren Kräfte nur an jeder einzelnen Oberfläche dieselbe resultierende Dyname besitzen wie die wirklichen äußeren Kräfte, wenn also für jede einzelne Begrenzungsfläche

$$-\oint d\vec{f} \cdot \underline{\sigma}^{K*} = \oint \mathfrak{P} d\vec{f} \quad (4.9)$$

und

$$\oint d\vec{f} \cdot \underline{\sigma}^{K*} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = -\oint \mathfrak{P} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) d\vec{f} \quad (4.10)$$

ist. Durch die fiktiven inneren Kräfte wird dann Gleichgewicht an jeder einzelnen Oberfläche hergestellt, und der Rest der Aufgabe läßt sich dann als Randwertproblem nach der Methode der Spannungsfunktionen erledigen. Die für die Anwendungen bequemste Lösung von (4.9–10) erhält man durch Zusammenziehen der fiktiven Extraspannung auf singuläre Linien, die man dann bei der Spannungsberechnung durch Differenzieren ausspart, ähnlich wie dies in (4.1–6) mit der singulären Rückstromlinie geschehen ist. Die fiktive Extraspannung wird also auf unendlich dünne Verbindungsschläuche zwischen den einzelnen Begrenzungsflächen beschränkt und ist im Spannungsfeld gar nicht mehr erkennbar, wenn man, wie üblich, seinen Wert an der Ausnahmestelle durch den Grenzwert bei der Annäherung aus der Umgebung ersetzt. Freilich treten die fiktiven Extraspannungen sofort wieder in Erscheinung, wenn man versucht, durch kontinuierliche Superposition solcher Lösungen wieder neue Lösungen zu konstruieren; will man dann die fiktive Extraspannung erneut auf singuläre Linien zusammenziehen, so erfordert dies die Lösung eines zusätzlichen Eigenspannungsproblems.

Will man also die Singularitäten des fiktiven Extraspannungsfeldes oder, was auf dasselbe herauskommt, die Singularitäten des fiktiven Gleichgewichts-

) Die fiktiven Extraspannungen σ^{K} dürfen nicht mit den von der Wärmedehnung, der Magnetostriktion, der plastischen Verformung usw. herrührenden wirklichen Extraspannungen σ^Q verwechselt werden, die durch $\sigma^Q = -c \dots \varepsilon^Q$ mit der Extradehnung ε^Q zusammenhängen und zusammen mit der dehnungswirksamen Spannung σ^D die Gesamtspannung $\sigma^G = \sigma^Q + \sigma^D$ ergeben [5, 7]. Zur Einführung von σ^{K*} und σ^{G*} bestand loc. cit. kein Anlaß, da nur Eigenspannungen betrachtet wurden, während hier wegen $\sigma^Q = 0$ im störungsfreien Bereich σ^D mit σ^G identisch ist, also nicht besonders eingeführt zu werden braucht. Man vergleiche dazu auch das an anderer Stelle [38] ausgeführte Beispiel einer waagerechten Platte mit diffundierenden Dilatationszentren im Schwerfeld.

Mit Hilfe der fiktiven Extraspannung läßt sich auch das Lastspannungsproblem mit Volumenkräften der Spannungsfunktionsmethode zugänglich machen. Der bekannte Sonderfall, daß die Volumenkräfte aus einem Potential abgeleitet werden [27], zeichnet sich dadurch aus, daß die Bestimmung eines fiktiven Extraspannungsfeldes ohne besondere Integration möglich ist.

spannungsfeldes untersuchen, so kann man dafür nicht mehr das ausgeglättete Spannungsfeld benutzen, sondern muß unmittelbar auf die Spannungsfunktionen zurückgehen. Man geht dabei ähnlich vor wie in der Theorie der Vektorfelder, wo man aus dem Grenzwert des Umlaufintegrals

$$S = \oint dr \cdot \nabla \quad (4.11)$$

beim Zusammenziehen des Umlaufs über der singulären Linie die Stärke der Wirbellinie des Vektorpotentials, d. h. also, der singulären Stromlinie des Strömungsvektors, bestimmt. An die Stelle von (4.11) treten in der Elastizitätstheorie die Grenzwerte der Integrale (1.5) und (1.6) von *Peretti* und *Günther*, deren Anwendung im Innern des elastischen Körpers sich durch das folgende Gedankenexperiment begründen läßt.

Wir knüpfen an die bekannte Definition der Gesamtspannung an, nach der

$$d\vec{P} = d\vec{f} \cdot \underline{\sigma}^G \quad (4.12)$$

für jedes beliebige orientierte Flächenelement $d\vec{f}$ eines Ufers irgendeiner beliebigen Schnittfläche im Innern des verspannten Körpers die Kraft ist, die man an diesem Flächenelement anbringen muß, um den gegebenen Spannungszustand aufrechtzuerhalten. Denken wir uns nun ganz im Innern einen solchen endlichen Schnitt wirklich ausgeführt und die zur Aufrechterhaltung des Spannungszustandes erforderlichen Kräfte an beiden Schnittufern angebracht (Abb. 7), so bedeutet dies nichts anderes als eine neue geschlossene Oberfläche

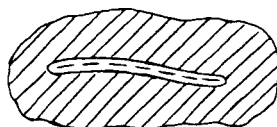


Abb. 7. Zur Deutung der Spannungsfunktionen im Innern

----- Schnittfläche

————— Krustenschale bzw. -hülle

im Innern, deren Flächenbelastung die resultierende Dyname Null besitzt. Man könnte also die Kräftebelegung auch durch eine geschlossene Krustenhülle nach § 2b ersetzen; daß der umschlossene Hohlraum in diesem Fall unendlich dünn ist, spielt in diesem Zusammenhang keine Rolle. Setzen wir noch an die Stelle der Gesamtspannung die aus einem Spannungsfunktionentensor ableitbare fiktive Gleichgewichtsspannung nach (4.7), so kann auch das gesamte umgebende Material nach *Schaefer* [10] durch die Krustenschale ersetzt werden, und die Voraussetzungen für die Anwendung der *Peretti-Güntherschen* Umlaufintegrale (1.5—6) zur Berechnung der Kräfte und des Moments auf das umschlossene Teilstück des Schnittufers sind gegeben. Zieht man die Integrationsumläufe über einem regulären Punkt von $\underline{\sigma}^{G*}$ zusammen, so streben die Integrale gegen Null; beim Zusammenziehen über dem Durchstoßpunkt einer singulären Linie aber kann man aus dem Grenzwert der resultierenden Dyname Rückschlüsse auf die Art der fiktiven singulären Extraspannung ziehen. Beispiele dazu werden in den §§ 7 und 8 gegeben.

c) Ebene Probleme in räumlicher Betrachtung

Wir müssen, im Hinblick auf die Besonderheiten ebener Spannungs- bzw. Verzerrungsprobleme, noch besonders den Fall betrachten, daß der Verbindungsschlauch nicht über einer singulären Linie, sondern über einer singulären Fläche zusammengezogen wird, deren Begrenzung teilweise im Unendlichen liegen kann. Wir betrachten zunächst Abb. 5, S. 11. Da mit Ausnahme der vom Kurvenviereck $ABCD$ aufgespannten singulären Fläche im ganzen störungsfreien Bereich die Gleichung (2.10) gilt, kann man zu der fiktiven Gleichgewichtsspannung (4.7) nach dem *Hookeschen* Gesetz eine fiktive elastische Dehnung

$$\underline{\varepsilon}^{E*} = \underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi} \quad (4.13)$$

berechnen, welche jedoch mit Ausnahme der singulären Fläche im ganzen störungsfreien Bereich mit der tatsächlich auftretenden Gesamtdehnung $\underline{\varepsilon}^G$ identisch sein muß, wenn nur die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Die elastische Dehnung in der Oberfläche des plattgedrückten Verbindungsschlauchs muß beiderseits der singulären Fläche gleich sein; hierfür ist es bei Stetigkeit der elastischen Konstanten hinreichend, wenn $\text{Ink } \underline{\chi}$ auf beiden Seiten denselben Grenzwert hat. Schließen wir dabei zunächst den Rand des Kurvenvierecks $ABCD$ aus, so kann noch ein *Volterrascher* Distorsionszustand übrigbleiben, d. h. es können noch Versetzungslinien 1. und 2. Art in der Berandung der singulären Fläche verlaufen.
2. Selbstverständlich muß auch der *Volterrasche* Distorsionszustand verschwinden, da anders die Voraussetzung einfachen Zusammenhangs des störungsfreien Bereichs nicht mehr erfüllt ist. Denn die beiden Teilstücke \overline{AB} und \overline{CD} der Berandung durchstoßen den ursprünglichen, einfach zusammenhängenden Bereich und machen ihn doppelt zusammenhängend. Bei Stetigkeit der elastischen Konstanten machen sich aber Versetzungslinien an diesen Stellen durch unendlich hohe Grenzwerte der Spannung bemerkbar; liegt das Kurvenviereck also ganz im Endlichen, so genügt es in diesem Fall, die Stetigkeitsforderung für den Grenzwert von $\text{Ink } \underline{\chi}$ auch auf den Rand auszudehnen.
3. Dieses einfache Kriterium versagt jedoch, wenn der störungsfreie Bereich zu einem unendlich langen, beiderseits geschlossenen Schlauch entartet und die beiden Begrenzungslinien \overline{AB} und \overline{CD} nach beiden Seiten ins Unendliche abwandern. Dann lassen sich ihre Spannungsfelder nicht mehr an einer Unstetigkeit im Endlichen nachweisen, und man hat nur noch die Möglichkeit, durch Integration nach (2.7) und (3.1) den vorhandenen Verschiebungs- und Drehsprung zu berechnen; d. h., man muß genau so vorgehen wie im Fall doppelten Zusammenhangs und den unendlich langen Schlauch als beiderseits offen betrachten. Das heißt man kann jetzt zwischen mehrfachem Zusammenhang und mehrfacher Begrenzung nicht mehr unterscheiden.

Das gilt besonders für ebene Probleme, wie schon im Anschluß an (4.3) bemerkt wurde. Durch Einführung der von z unabhängigen *Airyschen* Spannungsfunktion erscheint der ebene Verzerrungszustand als Dehnungszustand eines unendlich langen Zylinders, und der ebene Spannungszustand läßt sich in derselben Weise deuten, wenn man die elastischen Konstanten unter Verzicht

auf Isotropie derart abändert, daß die Spannungskomponente σ_{zz} keine elastische Dehnung mehr hervorruft. Tatsächlich sind die Integralbedingungen für den lastfreien Rand eines ebenen Ringgebiets von *Mitchell* [16] auf Grund der Eindeutigkeitsforderung für die Verschiebungen aufgestellt worden. Daß sie außerdem nach *Prager* [17] als natürliche Randbedingungen des Variationsproblems auftreten, wird auch verständlich aus einem Satz von *Colonnetti* [20] (vgl. [2], S. 62), nach dem sich die Energien der Eigenspannungen und der Lastspannungen unabhängig voneinander addieren. Der Ausschluß von Versetzungen bringt dann einfach den Eigenspannungsanteil der elastischen Energie zum Verschwinden.

Auch der Spannungszustand einer Platte läßt sich im Prinzip als Ausschnitt aus dem Spannungszustand eines unendlich langen Zylinders auffassen, allerdings wegen der nach außen über alle Grenzen wachsenden Biegespannungen nur unter allerlei reichlich gekünstelten Annahmen über Belastung und E -Modul. Sinnvoller ist die Einführung der Platten-Spannungsfunktionen nach *Schaefer* [19] aus dem Sprung eines Nullspannungsfunktionfeldes (d. h. eines Deformatorfeldes); danach beschränkt sich der wirksame Anteil des Spannungsfunktionfeldes auf die singuläre Sprungfläche. Indem nun die Integrationsumläufe über beide Seiten der singulären Fläche hinweggeführt werden ([19], Abb. 1), wird bei einem ebenen Ringgebiet zugunsten der Auffassung zweifachen Zusammenhangs entschieden, und derselben Auffassung entspricht auch Gleichung (25) bei *Schaefer* [18] für eine Platte mit einem unbelasteten Rand. Dagegen läßt sich der nach [18] analoge Fall der Scheibe mit starrem Einschuß sowohl als ein Fall doppelten Zusammenhangs (vgl. § 5) wie auch doppelter Begrenzung auffassen. Die zweite Deutung drückt sich darin aus, daß jeder Weg oberhalb oder unterhalb der singulären Fläche verboten ist und ein Weg in der Fläche durch das Ringgebiet als Durchstoßung des Innengebiets angesehen wird.

5. Spannungsfunktionen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß im mehrfach begrenzten störungsfreien Bereich die Aufstellung eines Spannungsfunktionentensors nicht immer möglich ist, während der Eindeutigkeitsbeweis durch die mehrfache Begrenzung nicht gestört wird. Umgekehrt wird der Existenzbeweis durch mehrfachen Zusammenhang nicht beeinflusst, da sich auch eine mehrfach zusammenhängende Oberfläche von einer geschlossenen Krustenhülle umgeben läßt (vgl. (2.21) ff.). Dagegen versagt der Eindeutigkeitsbeweis, weil der nach (2.14) entscheidende Beweisschritt, nämlich die Zusammenziehung des Integrationsumlaufs auf einen Punkt, bei mehrfachem Zusammenhang nicht immer möglich ist. Die nähere Untersuchung zeigt, daß dies, wie zu erwarten, an der Möglichkeit des Auftretens *Volterrascher* Distorsionszustände liegt. Eine von *Schaefer* [18, 19, 39] mehrfach untersuchte Analogie zwischen Nullspannungsfunktionen und Verzerrungen wird dabei ins Räumliche erweitert.

a) Der Eindeutigkeitsbeweis bei mehrfachem Zusammenhang

Ein Blick auf (2.14) zeigt, daß in dem Umlaufintegral der erzeugende Vektor \mathfrak{A} der Nullspannungsfunktionen und der Differenzvektor u der Verschiebun-

gen in genau derselben Weise auftreten. Wir stellen daher die analogen Gleichungen für \mathfrak{U}^- und u^- noch einmal zusammen und beachten dabei, daß wegen des mehrfachen Zusammenhangs weder die räumliche Einwertigkeit von \mathfrak{U}^- noch die von u^- vorausgesetzt werden darf, daß also u^- nicht mehr unbedingt eine physikalisch realisierbare, einwertige Verschiebung sein muß. Die Achse des Drehsprungs wird, statt wie bisher durch den Ursprung, durch den Punkt mit dem Ortsvektor r_0 gelegt. Dann gehört zu dem Verschiebungsfeld

$$u^-(r) = \int_{r_0}^r dr' \cdot \{ \underline{\varepsilon}^-(r') + (\underline{\varepsilon}^-(r') \times \nabla') \times (r' - r) \} \quad (5.1)$$

der Verschiebungssprung nach einem vollen Umlauf vom Schnittufer 1 zum Schnittufer 2

$$b^-(r) = u_2^- - u_1^- = b_0^- + b^- \times (r - r_0) \quad (5.2)$$

mit

$$b_0^- = \int d\mathbf{f}' \cdot (\text{Ink } \underline{\varepsilon}^-(r')) \times (r' - r_0) \quad (5.3)$$

und

$$b^- = - \int d\mathbf{f}' \cdot \text{Ink } \underline{\varepsilon}^-(r') \quad (5.4)$$

Legt man den Umlauf auf die Bereichsoberfläche, so verschwinden wegen der Kompatibilitätsbedingung (1.10) die Ausdrücke (5.2–5.4), wenn der Umlauf nach Abb. 8b das Innengebiet umschließt. Nur ein Umlauf um das Außengebiet nach Abb. 8c kann einen Verschiebungs- und Drehsprung liefern.

Entsprechend kann der Vektor

$$\mathfrak{U}^-(r) = \int_{r_0}^r dr' \cdot \{ \underline{\chi}^-(r') + (\underline{\chi}^-(r') \times \nabla') \times (r' - r) \} \quad (5.5)$$

nach einem vollen Umlauf vom Schnittufer 1 zum Schnittufer 2 um das negative Moment bezüglich r

$$-\vec{M}^-(r) = \mathfrak{U}_2^- - \mathfrak{U}_1^- = -\vec{M}_0^- - \vec{P}^- \times (r - r_0) \quad (5.6)$$

springen, wobei nach *Peretti* [22] und *Günther* [13]

$$\vec{M}_0^- = - \int d\mathbf{f}' \cdot (\text{Ink } \underline{\chi}^-(r')) \times (r' - r_0) \quad (5.7)$$

das Moment bezüglich r_0 und

$$\vec{P}^- = \int d\mathbf{f}' \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^-(r') \quad (5.8)$$

die Kraft auf das vom Umlauf berandete Flächenstück ist. Sind die auf der Oberfläche angreifenden Kräfte im Gleichgewicht, so müssen (5.6–5.8) für jeden beliebigen Spannungsfunktionentensor $\underline{\chi}$ auf einem durch kanonische Zerschneidung [4] gebildeten Umlauf (vgl. Abb. 8a für den Torus) verschwinden, wenn er die Oberflächenbelastung richtig wiedergibt*); erst recht gilt dies für den Differenzentensor $\underline{\chi}^-$.

*) Im Falle mehrfacher Begrenzung hat man gegebenenfalls den Bereich vorher durch Verbindungsschläuche auf einfache Begrenzung zu reduzieren.

Diese Ausdrücke verschwinden aber auch für einen Umlauf auf der Oberfläche um das Außengebiet (Abb. 8c). Denn schneidet man die Torusoberfläche in einem solchen Umlauf auf und überspannt ein Schnittufer mit einer einfach zusammenhängenden, unbelasteten Fläche (Abb. 8d), welche die aufgeschnittene

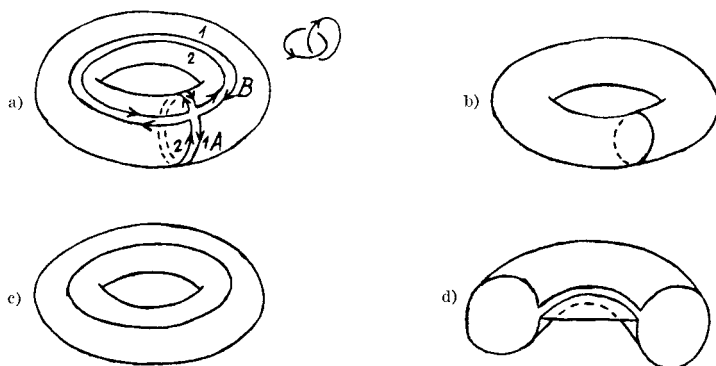


Abb. 8. Die Krustenschale des zweifach zusammenhängenden Bereichs

- a) Umlauf um die Oberfläche nach kanonischer Zerschneidung
- b) Umlauf um das Innengebiet
- c) Umlauf um das Außengebiet
- d) Ergänzung zur einfach berandeten Schale durch eine das Innere nicht zerschneidende Fläche (Querschnitt)

ne Torusoberfläche zu einer einfach zusammenhängenden, vom anderen Schnittufer berandeten Fläche ergänzt, so liefert (5.6) bis auf das Vorzeichen auf diesem Schnittufer die resultierende Dynamik aller Kräfte auf diese Fläche, also Null. \mathfrak{A}^- kann also nur auf einem Umlauf um das Innengebiet springen (Abb. 8b); (5.6) gibt dann bis auf das Vorzeichen für eine Schnittfläche nach Abb. 6, S. 11 die Dynamik wieder, die das im positiven Sinne umlaufene Schnittufer vom anderen Schnittufer erfährt. Bei höherer Zusammenhangszahl macht man die Brezel vorher durch geeignete Zerschneidung doppelt zusammenhängend und wendet denselben Schluß auf das übrigbleibende Loch an.

Es entspricht also in dieser Analogie

$$b_0^- \cong -\vec{M}_0^- \quad \text{und} \quad b^- \cong -\vec{P}^- \quad (5.9)$$

Die Größen auf der linken Seite können nur für einen Umlauf um das Außengebiet, die Größen auf der rechten Seite nur für einen Umlauf um das Innengebiet von Null verschieden sein.

Nun wird das Umlaufintegral (2.14) auf dem Rand der einfach zusammenhängenden Fläche ausgeführt, die man durch kanonische Zerschneidung [4] der mehrfach zusammenhängenden Bereichsoberfläche erhält, und zwar wie üblich im positiven Umlaufsinn, bei dem die umfahrene Fläche zur Linken liegt (Abb. 8a). Der ganze Umlauf läßt sich dann aus Doppelumläufen zusammensetzen, deren eine Hälfte das Innengebiet (Doppelumlauf A) und deren andere Hälfte das Außengebiet (Doppelumlauf B) umschließt. Die beiden Teilumläufe

eines Doppelumlaufs werden im entgegengesetzten Sinne durchlaufen; die Bezifferung der beiden Teilumläufe wird für jeden Doppelumlauf A so gewählt, daß der Umlauf von 1 nach 2 um das Außengebiet eine Rechtsschraube bildet mit dem Umlauf um das Innengebiet, der vom Teilumlauf 1 des Doppelumlaufs B zum Teilumlauf 2 führt (Abb. 8a). Bei höherer Zusammenhangszahl werden die Doppelumläufe A und B paarweise einander zugeordnet derart, daß der Doppelumlauf A jeweils das Loch der Brezel durchstößt, das der zugehörige Doppelumlauf B umschließt.

Der Beitrag eines Doppelumlaufs verschwindet sicher dann, wenn die Vektoren \mathfrak{A}^- und \mathfrak{u}^- auf beiden Teilumläufen denselben Wert haben; nur wenn $\vec{M}^-(\mathbf{r})$ bzw. $\mathfrak{b}^-(\mathbf{r})$ nicht gleich Null sind, liefert er einen Beitrag zu (2.14). Beim Doppelumlauf A wird der Teilumlauf 1 im positiven, Teilumlauf 2 im negativen Sinne durchlaufen; da der Vektor \mathfrak{A}^- zwischen diesen beiden Ufern nicht springen kann, folgt beim Einsetzen in (2.14) mit (5.2)

$$\begin{aligned} L^A &= \frac{1}{8} \oint d\mathbf{r} \cdot \{ -2 (\text{Def } \mathfrak{A}^-) \cdot [\nabla \times (\mathfrak{u}_1^- - \mathfrak{u}_2^-)] + 2 [\text{Def } (\mathfrak{u}_1^- - \mathfrak{u}_2^-)] \cdot (\nabla \times \mathfrak{A}^-) \\ &\quad + (\nabla \times \mathfrak{A}^-) \times [\nabla \times (\mathfrak{u}_1^- - \mathfrak{u}_2^-)] \} \\ &= \frac{1}{8} \oint d\mathbf{r} \cdot \{ 2 (\text{Def } \mathfrak{A}^-) \cdot (\nabla \times \mathfrak{b}^-(\mathbf{r})) - 2 (\text{Def } \mathfrak{b}^-(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \mathfrak{A}^-) \\ &\quad - (\nabla \times \mathfrak{A}^-) \times (\nabla \times \mathfrak{b}^-(\mathbf{r})) \} . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Beim Doppelumlauf B wird der Teilumlauf 2 im positiven, Teilumlauf 1 im negativen Sinne durchlaufen; da der Vektor \mathfrak{u}^- zwischen diesen beiden Ufern nicht springen kann, folgt beim Einsetzen in (2.14) mit (5.6)

$$\begin{aligned} L^B &= \frac{1}{8} \oint d\mathbf{r} \cdot \{ -2 [\text{Def } (\mathfrak{A}_2^- - \mathfrak{A}_1^-)] \cdot (\nabla \times \mathfrak{u}^-) + 2 (\text{Def } \mathfrak{u}^-) \cdot [\nabla \times (\mathfrak{A}_2^- - \mathfrak{A}_1^-)] \\ &\quad + [\nabla \times (\mathfrak{A}_2^- - \mathfrak{A}_1^-)] \times (\nabla \times \mathfrak{u}^-) \} \\ &= \frac{1}{8} \oint d\mathbf{r} \cdot \{ 2 (\text{Def } \vec{M}^-(\mathbf{r})) \cdot (\nabla \times \mathfrak{u}^-) - 2 (\text{Def } \mathfrak{u}^-) \cdot (\nabla \times \vec{M}^-(\mathbf{r})) \\ &\quad - (\nabla \times \vec{M}^-(\mathbf{r})) \times (\nabla \times \mathfrak{u}^-) \} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nun liegt für alle Umläufe der Vektor $d\mathbf{r}$ sicher stets tangential zu jeder vom Umlauf aufgespannten Fläche, also ist nach (5.2) für Doppelumlauf A

$$d\mathbf{r} \cdot \text{Def } \mathfrak{b}^-(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.12)$$

und nach (5.6) für Doppelumlauf B

$$d\mathbf{r} \cdot \text{Def } \vec{M}^-(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.13)$$

und weiter für jede von Doppelumlauf A aufgespannte Fläche

$$\nabla \times \mathfrak{b}^-(\mathbf{r}) = 2 \mathfrak{b}^- \quad (5.14)$$

und für jede von Doppelumlauf B aufgespannte Fläche

$$\nabla \times \vec{M}^-(\mathbf{r}) = 2 \vec{P} \quad (5.15)$$

Einsetzen in (5.10) und (5.11) liefert für Doppelumlauf A

$$\begin{aligned} L^A &= \frac{1}{8} \oint d\mathbf{r} \cdot \{ 2 (\text{Def } \mathfrak{A}^-) \cdot 2 \mathfrak{b}^- - (\nabla \times \mathfrak{A}^-) \times 2 \mathfrak{b}^- \} \\ &= \frac{1}{2} \oint d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathfrak{A}^- \cdot \mathfrak{b}^- = -\frac{1}{2} \vec{M}^-(\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{b}^- \end{aligned} \quad (5.16)$$

und für Doppelumlauf B

$$\begin{aligned} L^B &= \frac{1}{8} \oint d\mathbf{r} \cdot \{ -2 (\text{Def } \mathbf{u}^-) \cdot 2 \vec{P}^- - 2 \vec{P}^- \times (\nabla \times \mathbf{u}^-) \} \\ &= -\frac{1}{2} \oint d\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u}^- \cdot \vec{P}^- = -\frac{1}{2} \mathfrak{b}^-(\mathbf{r}) \cdot \vec{P}^- \end{aligned} \quad (5.17)$$

wobei für \mathbf{r} der Schnittpunkt der beiden Doppelumläufe zu wählen ist. Setzt man diesen noch gleich dem Momentenbezugspunkt \mathbf{r}_0 , so wird aus (5.16) nach (5.6)

$$L_0^A = -\frac{1}{2} \vec{M}_0^- \cdot \mathfrak{b}^- \quad (5.18)$$

und aus (5.17) nach (5.2)

$$L_0^B = -\frac{1}{2} \vec{P}_0^- \cdot \mathfrak{b}_0^- \quad (5.19)$$

Ein gleichzeitiger Sprung von \mathfrak{A}^- und \mathbf{u}^- beim selben Umlauf kommt, wie schon gezeigt, nicht vor; er würde aber sowieso keinen Beitrag zum Integral liefern. Denn wegen (5.12–15) ergäbe sich dann

$$L^* = -\frac{1}{2} \oint d\mathbf{r} \cdot (\vec{P}^- \times \mathfrak{b}^-) = 0 \quad (5.20)$$

wegen der Konstanz des Integranden. Dasselbe führt man bei mehr als doppeltem Zusammenhang für sämtliche Löcher der Brezel aus. Bei kanonischer Zerschneidung [4] existiert stets ein allen Doppelumläufen gemeinsames \mathbf{r}_0 .

Die physikalische Deutung ist nun einfach: die Summe aller $L_0^A + L_0^B$ bedeutet bis auf das Vorzeichen nichts weiter als die beim Aufbau *Volterrascher* Distorsionszustände zu leistende Arbeit. Setzen wir das Ergebnis in (2.11) ein so folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int \underline{\chi}^- \cdot [\text{Ink } (\underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^-)] d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda} (\vec{P}_{\lambda}^- \cdot \mathfrak{b}_{0\lambda}^- + \vec{M}_{0\lambda}^- \cdot \mathfrak{b}_{\lambda}^-) + \frac{1}{2} \int \text{Ink } \underline{\chi}^- \cdot \underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^- d\tau^* \end{aligned} \quad (5.21)$$

wo die Summe über alle Löcher der Brezel zu erstrecken ist. Die Gleichung besagt, daß auch bei verschwindender Randbelastung an jedem Loch noch die

*) Die mit fiktiven Extraspannungen behafteten Verbindungsschläuche in mehrfach begrenzten Bereichen (§ 4) sind bei der Volumenintegration auszulassen.

Eigenspannungen eines *Volterraschen* Distorsionszustandes übrig bleiben können*).

b) Das Randwertproblem bei mehrfachem Zusammenhang

Eine Lösung, die sämtliche statischen Randbedingungen erfüllt, kann für jedes Loch der Brezel nach (5.21) noch die Eigenspannungen eines *Volterraschen* Distorsionszustandes enthalten; sie muß also daraufhin untersucht und nötigenfalls durch Hinzufügen eines geeigneten Eigenspannungsfeldes auf den reinen Lastspannungszustand reduziert werden. Da es nun nicht mehr wie beim Eindeutigkeitsbeweis darauf ankommt, die ganze Oberfläche der Brezel einmal zu umfahren, brauchen nicht mehr wie beim Eindeutigkeitsbeweis sämtliche Umläufe durch einen Punkt zu gehen (kanonische Zerschneidung [4]), und man kann nun die beiden Umläufe vom Typ *A* und *B* an den einzelnen Löchern der Brezel unabhängig von den anderen Löchern konstruieren. Wir benötigen im folgenden nur noch Einzelumläufe, die am selben Loch miteinander eine Rechtschraube bilden (vgl. Nebenskizze bei Abb. 8a).

Nun sei eine Lösung des Randwertproblems in Form eines Spannungsfunktionentensors $\underline{\chi}^1$ gefunden, die die Oberflächenbelastung richtig wiedergibt. Dann stellt man etwa vorhandene Distorsionszustände fest, indem man in die *Cesàrosche* Formel (5.1) die zugehörige elastische Dehnung s. *Ink* $\underline{\chi}^1$ einsetzt und für jedes Loch der Brezel über einen Umlauf um das Außengebiet (Typ *B*) integriert, indem man also bildet

$$\begin{aligned} b^1(r) = & \oint d\tau' \cdot \{ \underline{s}(r') \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^1(r') + \\ & + [(\underline{s}(r') \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^1(r')) \times \nabla'] \times (r' - r) \} \end{aligned} \quad (5.22)$$

wobei r ein Punkt des Umlaufs ist. Legt man auch noch r_0 auf den Umlauf, so lassen sich daraus durch Vergleich mit (5.2.4) die Größen b_0^1 und d^1 bestimmen**).

Die Aufgabe, einen Eigenspannungszustand mit entgegengesetzt gleichem Verschiebungs- und Drehsprung zu bestimmen, läßt sich nun ebenfalls auf ein Randwertproblem mit Spannungsfunktionen zurückführen; man hat für die Randwerte Nullspannungsfunktionen mit dem erzeugenden Vektor \mathfrak{A}^1 einzusetzen, dessen Sprungeigenschaften auf einem Umlauf um das Innengebiet durch r_0 (Typ *A*) an jedem Loch so zu bestimmen sind, daß

$$b_0^{1-} = -b_0^1 \quad \text{und} \quad d^{1-} = -d^1 \quad (5.23)$$

Dies kann im allgemeinen Fall so geschehen, daß man das Randwertproblem löst für irgend ein beliebiges im Außenraum definiertes Vektorfeld \mathfrak{A} mit un-

*) Der physikalische Inhalt von (5.21) ist schon aus der grundlegenden Arbeit von *Volterra* [43] bekannt. Neu ist seine Verbindung mit der Theorie der Spannungsfunktionen. Im übrigen unterscheidet sich die *Volterrasche* Arbeit nur dadurch vom Standpunkt der modernen Eigenspannungstheorie, daß die Kompatibilität nicht ausdrücklich in die Definition der regulären Dehnung mit aufgenommen (l. c., S. 404), sondern offenbar als selbstverständlich vorausgesetzt wird.

**) Für jedes einzelne Loch der Brezel gilt also ein anderes r_0 . Auf eine besondere Indizierung der Lochnummer ($r_{0\lambda}$) wird im folgenden jedoch der Übersichtlichkeit wegen verzichtet.

bestimmten Sprungvektoren \vec{M}_0 und \vec{P} auf einem Umlauf um das Innengebiet durch r_0 . Wegen der Linearität sämtlicher Gleichungen läßt sich diese allgemeine Lösung linear aus den Lösungen für zweimal drei linear unabhängige Komponenten der Sprungvektoren zusammensetzen. Wendet man dann (5.22) auf diese allgemeine Lösung an und zerlegt nach (5.2), so erhält man Verschiebungs- und Drehsprung auf dem Umlauf B als Funktion der Sprungvektoren von \mathfrak{A} auf dem zugehörigen Umlauf A , also eine lineare Beziehung

$$\begin{aligned} b_0 &= b_0(\vec{M}_0, \vec{P}) \\ \mathfrak{b} &= \mathfrak{b}(\vec{M}_0, \vec{P}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Wenn die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems nicht verschwindet, was in allen physikalisch sinnvollen Fällen vorausgesetzt werden darf, so läßt sich diese Beziehung umkehren

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \vec{M}_0(b_0, \mathfrak{b}) \\ \vec{P} &= \vec{P}(b_0, \mathfrak{b}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Einsetzen von (5.23) liefert dann das gesuchte Vektorfeld \mathfrak{U}^1 - und, da das Randwertproblem für die Komponenten von \vec{M}_0 und \vec{P} schon gelöst wurde, durch lineare Superposition der einzelnen Komponentenlösungen das Spannungsfunktionenfeld χ^1 -, so daß

$$\chi = \chi^1 + \chi^{1-} \quad (5.26)$$

die gesuchte, von den Eigenspannungen *Volterrascher* Distorsionszustände freie Lösung des Randwertproblems ist. Man kann dieses Verfahren als eine Erweiterung der von *Prager* [17] im Anschluß an seine Gl. (14—16) gegebenen Lösungsmethode ins Dreidimensionale ansehen. Die Vertauschung von Außen- und Innengebiet und der physikalischen Bedeutung von \mathfrak{U} und u entspricht der von *Schaefer* [18] formulierten Analogie Scheibe-Platte im Räumlichen. Und zieht man die Torusoberfläche von Abb. 8 über einem singulären Kreis zusammen, den man anschließend auf unendlichen Radius erweitert, so wird die Beziehung zu der von *Schaefer* [39] untersuchten Spannungsfunktion des durch eine Dynam beanspruchten geraden Stabes offenbar.

c) Die Nullspannungsfunktionen bei speziellen Ansätzen

Über den erzeugenden Vektor der Nullspannungsfunktionen \mathfrak{U} sind bisher — außer den vorgegebenen Sprungstellen und den notwendigen Differenzierbarkeitseigenschaften — keine weiteren Voraussetzungen gemacht worden. Das ist auch durchaus zulässig, wenn im Innenraum die Gleichung (2.10) unmittelbar gelöst und zur Spannungsberechnung (1.2) benutzt wird. Setzt man dagegen an die Stelle von (2.10) irgendeinen einfacheren Differentialausdruck, der nur bei gleichzeitiger Erfüllung einer Nebenbedingung oder bei einem speziellen Ansatz für χ auch die Erfüllung von (2.10) garantiert, so sind i. allg. diese Nebenbedingungen auch für die Nullspannungsfunktionen zu beachten. Selbstverständlich kann man zu χ nachträglich einen beliebigen, im ganzen Innengebiet definierten Deformator addieren, sofern man zur Berechnung der Spannungen die ursprüngliche Gleichung (1.2) benutzt; bei Vorgabe von Nebenbedin-

ungen läßt sich aber $\text{Ink } \chi$ oft durch einfachere Differentialausdrücke ersetzen, die für einen beliebigen Deformator keineswegs verschwinden müssen. Noch wichtiger ist der Fall mehrfach zusammenhängender Bereiche, wenn der Deformator mit mehrwertigem erzeugendem Vektor \mathfrak{A} zunächst nur im Außenraum definiert ist und die daraus abgeleitete „Nullspannungsfunktion“ nur im Außengebiet wirklich auf die Spannung Null führt, im Innern dagegen den Eigen Spannungszustand *Volterrascher* Distorsionen beschreibt und daher kein reiner Deformator mehr sein kann. Dann muß der Deformator im Außenraum so spezialisiert werden, daß er durch Vermittlung der Randbedingungen an der Bereichsoberfläche zugleich auch die Einhaltung der Nebenbedingungen bzw. des speziellen Ansatzes im ganzen Innenraum garantiert.

Als Ersatz für (2.10) wird hauptsächlich im isotropen, homogenen Medium die Bipotentialgleichung verwendet. Wir führen im einzelnen an:

1. Die *Airysche* Spannungsfunktion in der Ebene. Die Nebenbedingungen bestehen hier darin, daß nur die zz -Komponente des Spannungsfunktionentensors nicht verschwindet und außerdem von x und y allein abhängt. Bekanntlich sind die einzigen zugehörigen Nullspannungsfunktionen lineare Funktionen von x und y ; andere Deformatoren, die die Nebenbedingungen erfüllen, gibt es nicht. Zum Verhalten der *Airyschen* Spannungsfunktion in ebenen Ringgebieten vgl. *Prager* [17].

2. Die Spannungsfunktionen der Platte nach *Schaefer* [18, 19]. Die Spannungsfunktionen Φ_1 und Φ_2 (und die *Airysche* Spannungsfunktion Φ_3) lassen sich nach *Schaefer* [19] für eine gewöhnliche (d. h. von *Cosseratschen* Momentenspannungen senkrecht zur Plattenebene freien) Platte auffassen als Komponenten des von z unabhängigen erzeugenden Vektors eines Nullspannungsfunktionfeldes, das aber nur im oberen Halbraum definiert ist. Seine Fortsetzung in den unteren Halbraum wird zu Null gesetzt; deshalb verschwinden die Inkompatibilitäten in der Grenzebene $z = 0$ nicht, sondern liefern singuläre Einfach- und Doppelbelegungen, die dem Platten- und Scheibenspannungszustand entsprechen. Man kann diese Herleitung ansehen als Grenzfall von Abb. 11, S. 42 die die Darstellung einer singulären Belastung in der Kurve (C) durch eine im Außenraum von (B) definierte Spannungsfunktion χ^a wiedergibt, wenn die Fläche (F) zur Ebene $z = 0$ wird und (B) zur Scheibe bzw. Platte entartet. Eine singuläre Beanspruchung außerhalb der Kurve (C) wird wiedergegeben, wenn man den oberen Halbraum durch eine singuläre Kurve (D) („Stange“ [19]) doppelt zusammenhängend macht und die entsprechenden Mehrwertigkeiten von \mathfrak{A} einführt [19]. Für Ringgebiete lassen sich die Betrachtungen dieses Abschnitts übertragen, wenn man den Grenzübergang aus Abb. 11 mit mehrfach zusammenhängendem (B) ausführt (vgl. dazu [18]). Φ_1 und Φ_2 bei Lastfreiheit lassen sich bei isotropem, homogenem Plattenmaterial mit Hilfe der Analogie Scheibe-Platte aus einer biharmonischen Funktion herleiten [18, 19].

Über die zulässige Nullspannungsfunktion erhält man am raschesten Auskunft, wenn man die Distributionen $\delta^{(0)}(z)$, $\delta^{(1)}(z)$, $\delta^{(2)}(z)$ eingeführt (vgl. Anhang).

Dann schreibt sich

$$\underline{\chi} = \text{Def } \mathfrak{A} (x, y) \delta^{(0)} (z) \quad (5.27)$$

und man erhält durch Differenzieren

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \nabla \times \underline{\chi} \times \nabla \\ &= \delta^{(2)} (z) \mathfrak{f} \times \text{Def } \mathfrak{A} \times \mathfrak{f} \\ &+ \delta^{(1)} (z) (\mathfrak{f} \times \text{Def } \mathfrak{A} \times \nabla + \nabla \times \text{Def } \mathfrak{A} \times \mathfrak{f}) \\ &= \delta^{(2)} (z) \mathfrak{f} \times \text{Def } \mathfrak{A} \times \mathfrak{f} \\ &+ \delta^{(1)} (z) \cdot \frac{1}{2} (\mathfrak{f} \times \nabla \mathfrak{A} \times \nabla + \mathfrak{A} \times \nabla \mathfrak{f} \times \nabla) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Das erste Glied enthält die Biegemomente, das zweite Querkkräfte und Scheibenspannungen. Da sich in der zweiten Klammer beide Dyaden aus denselben Vektoren zusammensetzen, kann dieser Ausdruck nur für konstantes $\nabla \times \mathfrak{A}$ verschwinden. D.h. es ist nur ein Vektorfeld \mathfrak{A} zulässig, das einer starren Rotation entspricht ([18], Gl. (24b)).

3. Die *Kröner-Marguerresche* Lösung im Raum [25, 12, 2]. Wir verwenden die Formulierung von *Kröner* ([2], (II. 18)), der an Stelle des Spannungsfunktionentensors einen daraus abgeleiteten Tensor

$$\gamma = \frac{1}{2G} \left(\underline{\chi} - \frac{1}{m+2} \chi_I I \right) \quad (5.29)$$

(G = Schubmodul, m = Querkontraktionszahl)

benützt. Die *Kröner-Marguerresche* Nebenbedingung bei Verwendung der Bipotentialgleichung lautet dann

$$\nabla \cdot \gamma = 0 \quad (5.30)$$

und wird mit Sicherheit gewährleistet, wenn man (5.30) als Randbedingung vorschreibt und durch die weitere Randbedingung

$$\mathfrak{n} \cdot \nabla \nabla \cdot \gamma = 0 \quad (5.31)$$

ergänzt. (5.30) und (5.31) können, da sie homogen sind, auch an jeder einzelnen Oberfläche eines mehrfach begrenzten Bereiches vorgeschrieben werden*). *Kröner* ([2], (II. 23)) gibt als vereinfachte Formel für die Spannungen an Stelle von (1.2) bei Gültigkeit von (5.30)

$$\underline{\sigma} = 2G \left[\Delta \gamma + \frac{m}{m-1} (\nabla \nabla \gamma_I - \Delta \gamma_I I) \right] \quad (5.32)$$

und schreibt diese Gleichungen außerdem noch in Zylinderkoordinaten an ([2], § 32). Wie man leicht sieht, ist es für eine Nullspannungsfunktion

$$\underline{\chi}^0 = \text{Def } \mathfrak{A} = 2G \gamma^0 \quad (5.33)$$

*) Man sieht dies z. B. ein, wenn man den Bereich durch Anbohren auf einfache Begrenzung reduziert und den Durchmesser der Verbindungsschläuche gegen Null gehen läßt. Fiktive Extraspannungen im Verbindungsschlauch (§ 4) bleiben dabei ohne Einfluß, da sie definitionsgemäß die Oberfläche des Verbindungsschlauchs kräftefrei lassen.

hinreichend, wenn sich der erzeugende Vektor

$$\mathfrak{A} = \nabla A + \nabla \times \vec{A} \quad (5.34)$$

aus harmonischen Potentialen A und \vec{A} ableiten läßt. Solche Potentiale genügen auch zur Erzeugung jeder vorgeschriebenen räumlichen Mehrwertigkeit des Vektors \mathfrak{A} . Denn ist an irgendeiner einfach zusammenhängenden, zweifüßigen Schnittfläche (vgl. (5.6)) der Sprung

$$-\vec{M}(r) = \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 = -\vec{M}_0 - \vec{P} \times (r - r_0) \quad (5.35)$$

vorgegeben, so gibt man z. B. am Ufer 1 die Randwerte 0 und am Ufer 2 die Randwerte

$$A = -r \cdot \vec{M}_0$$

$$\vec{A} = \frac{1}{3} (r - r_0) \times [\vec{P} \times (r - r_0)] \quad (5.36)$$

vor und löst das zugehörige harmonische Randwertproblem im unendlichen Außenraum der beiden Schnittufer. Die Nullspannungsfunktion (5.33) ist dann in der Schnittfläche stetig, wie man leicht aus dem Satz über gleichwertige Schnitte von *Volterra* ([43], Chap. III) ableitet. Denn die *Poissonsche* Gleichung ist nur ein Spezialfall der allgemeineren Gleichung, welcher die Verschiebungen bei einer *Volterraschen* Distorsion genügen. Bei mehr als zweifachem Zusammenhang sind die Lösungen für die verschiedenen Schnittflächen zu überlagern.

Zum Schluß geben wir noch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für \mathfrak{A} an. Aus (5.30) und (5.32) erkennt man sofort, daß \mathfrak{A} harmonisch sein muß und $\text{div } \mathfrak{A}$ höchstens eine Konstante sein darf.

4. Der *Schaefer'sche* Ansatz im Raum [10, 11].

Mit dem Ansatz [11]

$$\underline{\chi} = \underline{\Theta} - \Theta_I \mathbf{I} + \Omega \mathbf{I}$$

$$\Delta \Omega = \frac{m}{m-1} (\nabla \cdot \underline{\Theta} \cdot \nabla + \Delta \Theta_I)$$

$$\Delta \underline{\Theta} = 0^* \quad (5.40)$$

(m = Querkontraktionszahl)

wurden von *Schaefer* [10] z. B. die Spannungsfunktionen zu den Problemen von *Boussinesq* und *Cerutti* am Halbraum aufgestellt. Wir bevorzugen hier eine zur Erweiterung auf Eigenspannungsprobleme etwas günstigere, ebenfalls von *Schaefer***) angegebene Form, die aus (5.40) durch die Substitution

$$\underline{\Theta} = \underline{\psi} - \frac{1}{2} \psi_I \mathbf{I} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\psi} = \underline{\Theta} - \Theta_I \mathbf{I} \quad (5.41)$$

*) Man beachte die in verschiedenen Arbeiten teilweise entgegengesetzte Vorzeichenkonvention für $\underline{\chi}$. Sie ist hier im Einklang mit [2] und [10], dagegen entgegengesetzt zu [11] und [27].

**) mündl. Mitt.

hervorgeht. Man hat dann

$$\begin{aligned}\underline{\chi} &= \underline{\psi} + \Omega \mathbf{I} \\ \Delta \Omega &= \frac{m}{m-1} (\nabla \cdot \underline{\psi} \cdot \nabla - \Delta \psi_1) \\ \Delta \underline{\psi} &= 0.\end{aligned}\tag{5.42}$$

Mit Hilfe einer identischen Umformung des Operators Ink (vgl. z. B. [12], Gl. (10)) oder des von *Schaefer* [11] benutzten Operators Δ^* erhält man daraus die Spannung

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \text{Ink } \underline{\chi} = \text{Ink } \underline{\psi} - \Delta \Omega \mathbf{I} + \nabla \nabla \Omega \\ &= -\nabla \nabla \cdot \underline{\psi} - \underline{\psi} \cdot \nabla \nabla + \nabla \nabla \psi_1 - \frac{1}{m-1} \nabla \cdot \underline{\psi} \cdot \nabla \mathbf{I} + \nabla \nabla \Omega\end{aligned}\tag{5.44}$$

Für eine Nullspannungsfunktion $\underline{\psi}^0$ muß dieser Ausdruck verschwinden. Zunächst muß sich eine solche Nullspannungsfunktion als Deformator darstellen lassen, denn andernfalls würde Ω nach (5.42) harmonisch, und die erste Gleichung (5.44) ergäbe einen Widerspruch. Wir setzen also an

$$\underline{\psi}^0 = \text{Def } \mathfrak{A}\tag{5.45}$$

und erhalten aus (5.44) die Bedingungen

$$\text{Ink } \underline{\chi} = -\Delta \text{Def } \mathfrak{A} - \frac{1}{m-1} \Delta \nabla \cdot \mathfrak{A} \mathbf{I} + \nabla \nabla \Omega = 0\tag{5.46}$$

und mit der zweiten Gleichung (5.42)

$$(\text{Ink } \underline{\chi})_1 = -\frac{m+2}{m-1} \Delta \nabla \cdot \mathfrak{A} + \Delta \Omega = \frac{-2}{m-1} \Delta \nabla \cdot \mathfrak{A} = 0\tag{5.47}$$

sowie

$$\Delta \Omega = 0.\tag{5.48}$$

Es ist also für den erzeugenden Vektor der Nullspannungsfunktionen notwendig und hinreichend, daß sein Deformator harmonisch ist; d. h. man kommt im wesentlichen auf dieselben Kriterien wie bei den *Kröner-Marguerreschen* Spannungsfunktionen. Zusätzlich muß nach (5.46) noch gefordert werden, daß Ω höchstens eine lineare Funktion in kartesischen Koordinaten sein darf. Praktisch wird man diese meist zu Null setzen.

6. Ebene Ringgebiete mit resultierender Dynamik an einer Begrenzung

Für zahlreiche Beispiele dieser Art hat *Föppl* [23] die *Airysche* Spannungsfunktion angegeben. Nach § 4 ist in solchen Fällen keine Darstellung durch *Airysche* Spannungsfunktionen möglich, ohne daß wenigstens auf einer singulären Linie ein fiktiver Eigenspannungszustand auftritt, welcher bei der Spannungsberechnung unterdrückt wird. Wir zeigen am einfachen Beispiel der Einzelkraft, daß sich dieser fiktive Eigenspannungszustand tatsächlich nach bekannten Methoden in der Spannungsfunktion selbst nachweisen läßt; eine Ausdehnung auf verwickeltere Beispiele ist dann ohne Schwierigkeiten möglich.

Die *Airysche* Spannungsfunktion erhält man bekanntlich durch Einschränkung des Spannungsfunktionentensors auf eine von z unabhängige zz -Komponente, indem man setzt

$$\chi_{zz} = -F(x, y) = -F(\varrho, \varphi); \text{ alle anderen } \chi_{ij} = 0 \quad (6.1)$$

oder unter Verwendung der Basisvektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\underline{\chi} = -F \mathbf{k} \mathbf{k} \quad (6.2)$$

Dann ist in kartesischen Koordinaten

$$\underline{\chi} \times \nabla = \mathbf{k} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{j} \right) \quad (6.3)$$

und in Zylinderkoordinaten mit den Basisvektoren $\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{k}$

$$\underline{\chi} \times \nabla = \mathbf{k} \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varrho - \frac{\partial F}{\partial \varrho} \mathbf{e}_\varphi \right) \quad (6.4)$$

Die Umläufe der *Perettischen* Linienintegrale (1.5–6) entarten zu unendlich langen Schleifen senkrecht auf der Spannungsebene; in räumlicher Auffassung liefern sie also Kraft und Moment je Längeneinheit eines von zwei Parallelen zur z -Achse aufgespannten zylindrischen Streifens, in zweidimensionaler Auffassung Kraft und Moment auf eine beliebige Verbindungslinie zwischen den beiden Durchstoßpunkten P_1 und P_2 . Man erhält in bekannter Weise in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 = & \left\{ F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) \right. \\ & - \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{P_2} (x_2 - x_0) - \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{P_2} (y_2 - y_0) \\ & + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{P_1} (x_1 - x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{P_1} (y_1 - y_0) \left. \right\} \mathbf{k} *) \end{aligned} \quad (6.5)$$

und

$$\vec{P} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{P_2} - \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{P_1} \left. \right\} \mathbf{i} - \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{P_2} - \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{P_1} \left. \right\} \mathbf{j} \quad (6.6)$$

bzw. in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 = & \left\{ F(\varrho_2, \varphi_2) - F(\varrho_1, \varphi_1) \right. \\ & - \left. \frac{\partial F}{\partial \varrho} \right|_{P_2} [\varrho_2 - \varrho_0 \cos(\varphi_2 - \varphi_0)] - \left. \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right|_{P_2} \varrho_0 \sin(\varphi_2 - \varphi_0) \\ & + \left. \frac{\partial F}{\partial \varrho} \right|_{P_1} [\varrho_1 - \varrho_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)] + \left. \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right|_{P_1} \varrho_0 \sin(\varphi_1 - \varphi_0) \left. \right\} \mathbf{k} *) \end{aligned} \quad (6.7)$$

*) Die anderen Komponenten des Moments divergieren unbestimmt wegen der unendlichen Länge des zylindrischen Streifens. Wir beziehen sie deshalb auf die „Mittelebene“ des unendlichen Zylinders und setzen dafür den „Cauchyschen Hauptwert“ Null ein.

und

$$\begin{aligned}\vec{P} = & \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \Big|_{P_2} e_{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \Big|_{P_1} e_{\varrho_1} \\ & - \frac{\partial F}{\partial \varrho} \Big|_{P_2} e_{\varphi_2} + \frac{\partial F}{\partial \varrho} \Big|_{P_1} e_{\varphi_1}.\end{aligned}\quad (6.8)$$

An Randlinien wird, wie üblich, der Punkt rechts von der nach außen weisenden Normalen mit dem Index 1 versehen; an inneren Schnittlinien tritt an ihre Stelle die zum anderen Schnittufer weisende Normale.

Die mathematisch einfachsten Hohlräume der Ebene sind — in Übereinstimmung mit *Föppl* [23], S. 94 — diejenigen, die man auf einen Punkt zusammenziehen kann, also unendlich kleine Aussparungen um den Angriffspunkt von Einzelkräften, Doppelkräften mit und ohne Moment, singulären Drehmomenten usw., deren Spannungsfeld von *Föppl* mit Hilfe der *Airyschen* Spannungsfunktion bestimmt wurde. Gerade die *Föpplsche* Herleitung der Spannungsfunktion einer Einzelkraft in der Vollebene zeigt sehr anschaulich das Ineinandergreifen von mehrfachem Zusammenhang und mehrfacher Begrenzung in der Ebene (vgl. § 4c). *Föppl* geht von der Spannungsfunktion der Einzelkraft am Keil aus und zieht diesen zur geschlitzten Ebene auseinander. Räumlich gesehen entspricht dies dem aufgeschnittenen Hohlzylinder, d. h. einem aus der Theorie der Einzelversetzungen [3, 43] bestens bekannten doppelt zusammenhängenden räumlichen Bereich mit Trennfläche. Tatsächlich findet *Föppl* in diesem Bereich auch noch eine Stufenversetzung am Kraftangriffspunkt, deren Spannungsfeld abgezogen werden muß. So folgt schließlich für eine Einzelkraft K in der negativen x -Richtung am Ursprung (Abb. 9) die Spannungsfunktion

$$F = \frac{K}{2\pi} \left(\varrho \varphi \sin \varphi - \frac{m-1}{2m} \varrho \ln \varrho \cos \varphi \right) \quad (6.9)$$

Jetzt, nach Beseitigung der Versetzung, betrachten wir die an der Kraftangriffsstelle punktierte Vollebene als einen einfach zusammenhängenden, aber doppelt begrenzten Bereich und müssen demnach räumliche Einwertigkeit der Spannungsfunktion fordern. Für das zweite Glied von (6.9) ist diese ohne weiteres gewährleistet; im ersten Glied müssen wir aber den Winkel φ für jeden Wert von ϱ zwischen zwei höchstens um 2π auseinanderliegenden Werten einschränken, wobei die Schranken zumindest stückweise differenzierbare Funktionen von ϱ sein müssen. Das geschieht am einfachsten, wenn man den Winkel φ an einer stückweise glatten, jeden Kreis um O nur einmal schneidenden Kurve um 2π zurückspringen läßt; der Verbindungsschlauch (§ 4) ist also durch eine Sprungstelle von φ markiert. Im übrigen kann der Verbindungsschlauch im Gegensatz zu den räumlichen Beispielen der folgenden Abschnitte beliebig gewählt werden; man könnte auch mehrere Verbindungsschläuche (Sprungstellen von φ) einführen, ohne daß sich dadurch die Form der Lösung (6.9) irgendwie ändern würde.

Auch in den Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \varrho} &= \frac{K}{2\pi} \left\{ \varphi \sin \varphi - \frac{m-1}{m} (\ln \varrho + 1) \cos \varphi \right\} \\ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{K}{2\pi} \left\{ \varphi \cos \varphi + \sin \varphi + \frac{m-1}{2m} \varrho \ln \varrho \sin \varphi \right\}\end{aligned}\quad (6.10)$$

tritt diese Singularität noch auf. Sie verschwindet erst in den an der singulären Stelle ausgeglätteten Spannungen [23].

Föppl zeigt nun die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung durch Integration über die Spannungen auf einem Kreis um den Kraftangriffspunkt und findet als Resultierende aller aus der Umgebung auf das Kreisgebiet wirkenden Kräfte die zu $-K_i$ (Abb. 9) entgegengesetzt gleiche Kraft, wie es auch sein

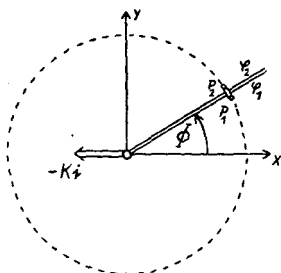


Abb. 9. Die Einzelkraft in der Ebene

muß, da die Sprungsingularität beim Differenzieren unterdrückt wurde ([23], § 23, (15)). Dagegen müßten die aus den *Peretti-Güntherschen* Integralen abgeleiteten Gleichungen (6.7–8) für einen geschlossenen Kreis Null ergeben, wenn die *Airysche* Spannungsfunktion samt ihren ersten Ableitungen stetig wäre (Abb. 9), denn dann müßten sich die Beiträge von P_1 und P_2 beim Zusammenrücken auf dem Kreis wegheben. In Wirklichkeit erhält man endliche Grenzwerte, wenn man in Abb. 9 die Punkte P_1 und P_2 auf die in den Strahl $\varphi = \Phi$ gelegte Singularität zusammenrücken läßt.

Das Vorzeichen dieser Grenzwerte hängt davon ab, ob man sie als Randpunkte des gestrichelten Kreises (Abb. 9) oder des Schnittes über der singulären Linie auffaßt; im einen Fall erhält man die über den gestrichelten Kreis von der Umgebung auf sein Inneres ausgeübten Kräfte wie bei der Integration über die Spannungen nach Föppl [23], im anderen Fall die durch den Verbindungsschlauch zur Aufrechterhaltung der Einzelkraft am Ursprung übertragene Dynamie. Die Numerierung von P_1 und P_2 in Abb. 9 entspricht der zweiten Auffassung. Man erhält

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -2\pi \quad (6.11)$$

und für einen Momentenbezugspunkt r_0 mitten zwischen P_1 und P_2 auf der singulären Linie

$$\vec{M}_0 = -K \varrho_0 \sin \Phi \mathbf{t} \quad (6.12)$$

sowie nach (6.8)

$$\vec{P} = K (-\cos \Phi \mathbf{e}_{\varrho_0} + \sin \Phi \mathbf{e}_{\varphi}) = -K \mathbf{i} \quad (6.13)$$

also die zur angreifenden Kraft statisch äquivalente Dynamie.

Der zugehörige fiktive Eigenspannungszustand (§ 4) ist besonders einfach zu deuten für $\Phi = 0$, also auf der Wirkungslinie der gegebenen Kraft, wo das Moment verschwindet. Die fiktive Extraspannung auf der singulären Linie, welche für die Spannungsfunktion die reale äußere Kraft ersetzt, entspricht dann einfachem Längsdruck. Man kann sie nach Art der z. B. von *Eshelby* [24] beschriebenen Zerschneidungsversuche etwa auf die folgende Art entstanden denken. Zuerst wird auf beiden Seiten der Singularitätslinie ein mäßig breiter Schlitz ausgeräumt (Abb. 10a). Nun wird das ganze Material mit Aus-

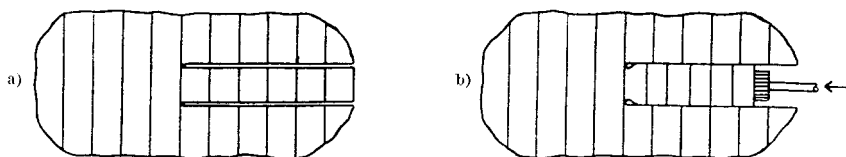


Abb. 10. Die fiktive Extraspannung zur Einzelkraft
(Die elastische Verformung außerhalb der Singularität ist unterdrückt)

nahme des Streifens zwischen den Schlitten bis zur völligen Starrheit versteift und dieser Streifen nach Abb. 10b durch einen von außen kommenden starren Stempel so weit zusammengepreßt, daß die ausgesägten Schlitzte infolge der Querdehnung gerade ausgefüllt werden. In dieser Lage wird verschweißt. Die nun im Streifen herrschende Druckspannung ist gleich der fiktiven Extraspannung σ^{K*} . Löst man nun wieder die Erstarrung des übrigen Materials, so stellt sich dort derselbe Spannungszustand ein, als ob am Ende des singulären Streifens eine Kraft angreifen würde. Im singulären Streifen selbst aber überwiegt weiterhin die Druckspannung, und diese haben wir in (6.13) nachgewiesen.

Ein ähnlich einfaches Ergebnis folgt für $\Phi = \pi$; in diesem Fall liegt die Singularität auf der negativen x -Achse, und an die Stelle des Drucks im singulären Streifen tritt jetzt Zug, so daß zum Ausgleich der Querkontraktion beiderseits Material nachgefüllt werden muß. Komplizierter wird die Singularität für alle übrigen Φ -Werte. Zu der einfachen, konstanten Druck- oder Zugspannung kommen noch Schubspannungen und eine nach außen linear zunehmende Doppelbelegung mit Zug- und Druckspannung, welche einerseits die durch die Schubspannungen bedingten inneren Kräfte auf der Oberfläche des Verbindungsschlauchs weghebt, andererseits das Moment (6.12) liefert. Die fiktive Extraspannung entspricht dann dem Spannungszustand eines dünnen Balkens, der außerdem noch zur Anpassung an kompliziertere Probleme beliebig gekrümmt werden darf. Wir werden das hier beschriebene Prinzip der Konstruktion einer fiktiven Extraspannung in den nächsten Abschnitten zur Aufstellung des Spannungsfunktionentensors einer Einzelkraft im Raume verwenden.

Ein zum Polarwinkel $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ proportionales Glied tritt auch in den Spannungsfunktionen Φ_1 und Φ_2 der durch eine Dynamie belasteten Platte von

Schaefer [19] auf. Eine Deutung der beschriebenen Art ist allerdings nicht ohne weiteres möglich, denn Φ_1 und Φ_2 sind als Komponenten des erzeugenden Vektors der Nullspannungsfunktionen im Außenraum eingeführt und werden — im Gegensatz zur *Airy*schen Spannungsfunktion — erst nach Multiplikation mit $\frac{1}{2} z^2$ zu Komponenten eines räumlichen Spannungsfunktionentensors im unendlich langen Zylinder. Da diese Auffassung jedoch auf linear divergierende Spannungen im Unendlichen führt, ist sie zur räumlichen Darstellung der Platte wenig geeignet (vgl. § 4c).

Schließt man sich dagegen der Auffassung von *Schaefer* [19] an, so wird die Spannungsfunktion durch (5.27) symbolisch dargestellt; sie besteht aus dem Produkt des Deformators mit einer *Heavisideschen* Sprungfunktion und ist somit räumlich eindeutig. Der fiktive Eigenspannungszustand ist jetzt erst in dem durch die Stange (D) und die Fläche (F) ergänzten Körper (B) definiert (Abb. 11) und somit nicht mehr als rein ebenes Problem anzusehen.*)

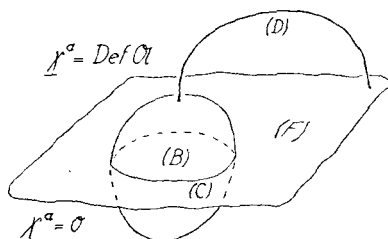


Abb. 11. Das „Stangenmodell“ für eine Lastsingularität an der Oberfläche

Auch die *Airy*sche Spannungsfunktion läßt sich nach *Schaefer* [19] als eine Komponente des Vektors \mathcal{A} in (5.27) auffassen; die hier benutzte Deutung als zz -Komponente eines Spannungsfunktionentensors ist aber einfacher und deshalb für topologische Betrachtungen vorzuziehen.

7. Der *Kröner-Marguerresche* Spannungsfunktionentensor für die Einzelkraft im unendlichen Raum

Bei diesem Problem ist der ganze unendliche Raum störungsfrei bis auf den Angriffspunkt der Kraft am Ursprung, um den ein unendlich kleiner Hohlraum vom störungsfreien Bereich auszunehmen ist. Der störungsfreie Bereich, der „punktierte Raum“, ist also zweifach begrenzt, und die Belastung an einer Begrenzung hat eine nicht verschwindende Resultierende, so daß nach § 4 dieses Lastspannungsproblem nicht unmittelbar mit Spannungsfunktionen gelöst werden kann, sondern durch ein gleichwertiges Eigenspannungsproblem zu ersetzen ist. Die zugehörige fiktive Extraspannung wird nach § 4 in einem singulären Verbindungsschlauch zum Kraftangriffspunkt untergebracht, und die Spannungsfunktion ist dann nur noch im „angebohrten Raum“ gültig.

*) Vgl. dazu S. 34, Abs. 2.

Der einfachste fiktive Eigenspannungszustand für diesen Fall wird durch Abb. 10 verdeutlicht, wenn man die Figur nicht mehr als Abbild einer ebenen Anordnung, sondern als Querschnitt durch ein rotationssymmetrisches Gebilde auffaßt. Im übrigen erfolgt seine mechanische Herstellung genau wie im Anschluß an (6.13) beschrieben. Der mathematische Aufbau geht in den folgenden Schritten vor sich (vgl. Abb. 10, S. 41):

1. Aus dem Spannungsfunktionentensor eines Versetzungsringes nach *Kröner* [2] werden durch Grenzübergang die Spannungsfunktionen eines einfachen Verschiebungsdipols bestimmt.
2. Aus den Spannungsfunktionen dreier aufeinander senkrechter Verschiebungsdipole wird der Spannungsfunktionentensor eines Dilatationszentrums aufgebaut.
3. Der einfache Verschiebungsdipol und das Dilatationszentrum werden zu einem (inneren) Kräftedipol [2] kombiniert.
4. Eine gleichmäßige Belegung der positiven z -Achse mit Kräftedipolen liefert das gesuchte Spannungsfunktionfeld der Einzelkraft. Die Singularität des fiktiven Eigenspannungszustandes im Verbindungsschlauch wird mit Hilfe der *Peretti-Güntherschen* Integrale nachgewiesen.
5. Durch Differenzieren kann man daraus schließlich auch das Spannungsfunktionfeld einer Doppelkraft mit Moment und höherer Singularitäten ableiten. Auch hier kann die Singularität im Verbindungsschlauch aus dem Grenzwert von Umlaufintegralen bestimmt werden.

Der Ausschluß höherer Singularitäten (vgl. *Sternberg und Eubanks* [40]) wird für die Einzelkraft durch die Art des Grenzübergangs unter Ziff. 1 gewährleistet. Wir benützen die von *Kröner* ([2], § 32) angegebene Form des *Kröner-Marguerreschen* Spannungsfunktionentensors (5.29) in Zylinderkoordinaten; die Übereinstimmung mit dem aus der Literatur bekannten und bei *Treftz* [26] explizit ausgeschriebenen Spannungsfeld der Einzelkraft läßt sich mit Hilfe der von *Kröner* angegebenen Formeln ([2], im Anschluß an (V. 30'')) ohne Schwierigkeiten nachprüfen. Wir führen die Schritte nun im einzelnen aus.

1. Der Spannungsfunktionentensor eines Verschiebungsdipols. Nach *Kröner* ([2], (II. 107)) ist der *Kröner-Marguerresche* Spannungsfunktionentensor (5.29) einer geschlossenen Versetzungsschleife

$$\gamma = -\frac{1}{8\pi} \{ \mathbf{b} \times \nabla \phi | \mathbf{r}' - \mathbf{r} | d\mathbf{r}' \}^{sym} \quad (7.1)$$

wobei \mathbf{r}' den Ortsvektor eines Punktes auf der Versetzungsschleife und \mathbf{b} den *Burgersvektor* nach der Vorzeichenkonvention von *Kröner* [2] bedeutet. Für eine kreisförmige Versetzungsschleife mit dem Halbmesser R um den Ursprung in der xy -Ebene und dem *Burgersvektor*

$$\mathbf{b} = b \mathbf{e}_z \quad (7.2)$$

ist insbesondere ([2], (V. 38))

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= -\frac{b}{8\pi} \{ \mathbf{f} \times \nabla \phi | \mathbf{r}' - \mathbf{r} | \mathbf{e}_{\varphi'} R d\varphi' \}^{sym} \\ &= -\frac{b}{8\pi} \{ \mathbf{f} \times \nabla f(\varrho, z) \mathbf{e}_{\varphi} \}\end{aligned}\quad (7.3)$$

wobei nach *Franz und Kröner* ([41], (8))

$$f(\varrho, z) = \frac{8}{3} \frac{R \sqrt{\varrho R}}{k^3} \{ 2(1 - k^2) \mathbf{K}(k) - (2 - k^2) \mathbf{E}(k) \}^* \quad (7.4)$$

ist mit den vollständigen elliptischen Integralen $\mathbf{E}(k)$ und $\mathbf{K}(k)$ und

$$k^2 = \frac{4 \varrho R}{(R + \varrho)^2 + z^2} \quad (7.5)$$

Wir ziehen nun die Versetzungsschleife um den Ursprung zusammen. Dann strebt gleichzeitig mit R auch k gegen Null und man erhält durch Entwicklung der elliptischen Integrale bis zur vierten Potenz in k ([42], S. 75)

$$f(\varrho, z) \rightarrow \pi R^2 \frac{\varrho}{r} = F \frac{\varrho}{r}; \quad r = \sqrt{\varrho^2 + z^2} \quad (7.6)$$

wo F die von der Versetzungsschleife umschlossene ebene Fläche ist.

Damit folgt der Spannungsfunktionentensor eines zz -Verschiebungsdipols der Stärke bF

$$\underline{\gamma}^{zz} = \frac{bF}{8\pi} \frac{1}{r} \left\{ \mathbf{e}_{\varrho} \mathbf{e}_{\varrho} + \frac{z^2}{r^2} \mathbf{e}_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} \right\} \quad (7.7)$$

Nach der Vorzeichenkonvention von *Kröner* [2] für den *Burgersvektor* aus dem Umlaufpaar in der Nebenskizze von Abb. 8a, S. 29 folgt für positives b ein Verschiebungsdipol, der durch Entfernen, und für negatives b ein Verschiebungsdipol, der durch Zufüllen von Material in der Versetzungsfläche erzeugt werden kann („negativer“ bzw. „positiver“ Verschiebungsdipol).

2. Der Spannungsfunktionentensor des Dilatationszentrums. Mit den Transformationsformeln

$$\begin{aligned}\varrho^{*2} &= z^2 + \varrho^2 \sin^2 \varphi \\ \cotg \varphi^* &= \frac{\varrho \sin \varphi}{z} \\ x &= \varrho \cos \varphi\end{aligned}\quad (7.8)$$

erhält man die Einheitsvektoren eines Zylinderkoordinatensystems mit der x -Achse als Achse

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\varrho^*} &= \frac{\nabla \varrho^{*2}}{|\nabla \varrho^{*2}|} = \frac{\mathbf{e}_{\varrho} \varrho \sin^2 \varphi + \mathbf{e}_{\varphi} \varrho \sin \varphi \cos \varphi + \mathbf{e}_z z}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 \sin^2 \varphi}} \\ \mathbf{e}_{\varphi^*} &= \frac{-\nabla \cotg \varphi^*}{|\nabla \cotg \varphi^*|} = \frac{-\mathbf{e}_{\varrho} z \sin \varphi - \mathbf{e}_{\varphi} z \cos \varphi + \mathbf{e}_z \varrho \sin \varphi}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 \sin^2 \varphi}}\end{aligned}\quad (7.9)$$

*) In ([2], (V. 39)) ist der Vorfaktor inkorrekt, und die Gleichungen ([2], (V. 41)) sind rechts noch mit $-\frac{1}{2}$ zu multiplizieren.

und daraus durch die Substitution

$$(\sin \varphi, \cos \varphi) \parallel (\cos \varphi, -\sin \varphi) \quad (7.10)$$

die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{\varphi^{**}}$, $\mathbf{e}_{\varphi^{**}}$ eines Zylinderkoordinatensystems mit der y -Achse als Achse. Der Spannungsfunktionentensor des Dilatationszentrums folgt dann durch Addition

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}^d &= \underline{\gamma}^{xx} + \underline{\gamma}^{yy} + \underline{\gamma}^{zz} \\ &= \frac{bF}{8\pi} \frac{1}{r} \left(\mathbf{e}_{\varrho^{**}} \mathbf{e}_{\varrho^{**}} + \frac{x^2}{r^2} \mathbf{e}_{\varphi^{**}} \mathbf{e}_{\varphi^{**}} + \mathbf{e}_{\varrho^{**}} \mathbf{e}_{\varrho^{**}} + \frac{y^2}{r^2} \mathbf{e}_{\varphi^{**}} \mathbf{e}_{\varphi^{**}} + \mathbf{e}_{\varrho} \mathbf{e}_{\varrho} + \frac{z^2}{r^2} \mathbf{e}_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Eine elementare, hier übergegangene Zwischenrechnung liefert in Matrixschreibweise mit der Koordinatenreihenfolge ϱ, φ, z

$$\underline{\gamma}^d = \frac{bF}{8\pi} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varrho^2}{r^2} & 0 & \frac{\varrho z}{r^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\varrho z}{r^2} & 0 & 2 - \frac{\varrho^2}{r^2} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Negatives b liefert ein positives, positives b ein negatives Dilatationszentrum („Kompressionszentrum“). Dieser Spannungsfunktionentensor stellt offenbar ein Gegenbeispiel dar zu der von Kröner ([2], S. 157) in vorläufiger Form ausgesprochenen Vermutung über Spannungszustände, die durch $\gamma_{\varrho\varrho}$ und $\gamma_{\varphi\varphi}$ allein ausgedrückt werden können. Denn da nach den Eindeutigkeitsätzen der Bipotentialtheorie der Kröner-Marguerresche Spannungsfunktionentensor bis auf einen konstanten Anteil (d. h. bis auf konstante Komponenten in kartesischen Koordinaten) eindeutig bestimmt ist, können die übrigen Komponenten von (7.12) nicht zum Verschwinden gebracht werden. Die Krönersche Vermutung trifft also nicht zu.

3. Der Spannungsfunktionentensor des Kräftedipols. Der Verschiebungsdipol läßt sich nach Kröner ([2], (II. 151)) durch Grenzübergang aus einer Versetzungsschleife definieren durch den Tensor

$$\underline{Q} = -\lim (F_i b_j) \quad (7.13)$$

welchen wir für die vorliegenden Probleme auf seinen symmetrischen Teil einschränken können. Nach Kröner ([2], (II. 153)) kann im homogenen Medium an seine Stelle der (innere) Kräftedipol

$$\underline{P} = \underline{c} \cdot \underline{Q} \quad (7.14)$$

gesetzt werden, bei Isotropie wird daraus

$$\underline{P} = 2G \left(\underline{Q} + \frac{Q_i \mathbf{I}}{m-2} \right) \quad (7.15)$$

Wir benötigen nun einen Kräftedipol der Form

$$\underline{P} = P \mathbf{f} \mathbf{f} \quad (7.16)$$

und setzen dazu an die Kombination eines einfachen Verschiebungsdipols mit einem Dilatationszentrum

$$\underline{Q} = A \mathbf{f} \mathbf{f} + B \mathbf{I} \quad (7.17)$$

was auf den Kräftedipol

$$\underline{P} = 2G \left(A \mathfrak{k} \mathfrak{k} + B \mathbf{I} + \frac{A + 3B}{m - 2} \mathbf{I} \right) \quad (7.18)$$

führt. Durch Vergleich mit (7.16) erhalten wir

$$A = \frac{P}{2G}; \quad B = -\frac{P}{2G(m+1)}. \quad (7.19)$$

Wir setzen nun nach (7.13) in (7.7) und (7.12) $-bF = A$ bzw. $-bF = B$ und addieren. Daraus folgt der Spannungsfunktionentensor des Kräftedipols (7.16)

$$\underline{\chi}^P = \frac{P}{16\pi G} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \frac{1}{m+1} \frac{\varrho^2}{r^2} - \frac{m}{m+1} & 0 & \frac{1}{m+1} \frac{\varrho z}{r^2} \\ 0 & \frac{\varrho^2}{r^2} - \frac{m}{m+1} & 0 \\ \frac{1}{m+1} \frac{\varrho z}{r^2} & 0 & \frac{1}{m+1} \left(2 - \frac{\varrho^2}{r^2} \right) \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

4. Der Spannungsfunktionentensor der Einzelkraft. Eine zu (7.13) gleichwertige Definition des Verschiebungsdipols bei Beschränkung auf symmetrische Tensoren folgt aus der Extradehnung $\underline{\varepsilon}^Q$ [5, 6, 7, 33, 34]

$$\underline{Q} = \lim_{V \rightarrow 0} \int_{(V)} \underline{\varepsilon}^Q d\tau \quad (7.21)$$

woraus sich für den Kräftedipol nach [5], ([7], (1.5)) eine entsprechende Definition aus der Extraspannung $\underline{\sigma}^Q$

$$\underline{P} = -\lim_{V \rightarrow 0} \int_{(V)} \underline{\sigma}^Q d\tau \quad (7.22)$$

herleiten läßt. Ersetzen wir nun in dem Eigenspannungszustand von Abb. 10, S. 41 die Druck-Extraspannung im herausgeschnittenen Zylinder unter Vorzeichenwechsel durch eine (fiktive) Zug-Extraspannung

$$\underline{\sigma}^{K*} = \sigma \mathfrak{k} \mathfrak{k} \quad (7.23)$$

in einem Zylinder der Grundfläche F um die positive z -Achse, so entspricht diese einer Belegung mit Kräftedipolen

$$\frac{dP}{dz} = -\underline{\sigma}^{K*} F = -\sigma F \mathfrak{k} \mathfrak{k} \quad (7.24)$$

An der Grundfläche F in der xy -Ebene tritt dann die innere Kraft

$$K \mathfrak{k} = \sigma F \mathfrak{k} = -\mathfrak{k} \cdot \frac{dP}{dz} \quad (7.25)$$

auf; die Einzelkraft der Größe K in der positiven z -Richtung kann also ersetzt werden durch eine Belegung der positiven z -Achse mit infinitesimalen fiktiven Kräftedipolen

$$dP = -K dz. \quad (7.26)$$

Man hat nun mit Hilfe von (7.20) das Spannungsfunktionenfeld eines solchen Dipols an der Stelle z' der z -Achse auszurechnen und über die ganze positive z -Achse zu integrieren. Wir setzen also in (7.20) ein

$$\begin{aligned} & -K \, dz' \text{ für } P \\ & z - z' \text{ für } z \\ & r' = \sqrt{\varrho^2 + (z - z')^2} \text{ für } r \end{aligned} \quad (7.27)$$

und integrieren über alle positiven z' . Hierbei zeigt sich, daß das Integral von $\frac{1}{r'}$ logarithmisch divergiert. Nach den Formeln von Kröner ([2], S. 156) ist es jedoch auch in Zylinderkoordinaten zulässig, beliebige Konstanten zu den Komponenten der Hauptdiagonale zu addieren; nur müssen diese Konstanten für $\gamma_{\varrho\varrho}$ und $\gamma_{\varphi\varphi}$ gleich sein. Ein Blick auf (7.20) zeigt demnach, daß man

$$\int_0^\infty \frac{1}{r'} \, dz' \text{ ersetzen darf durch } \int_0^\infty \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{z' - \frac{1}{2}} \right) dz';$$

bei den anderen Integralen sind jedoch auch die Konstanten wesentlich. Man erhält so mit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{z' - \frac{1}{2}} \right) dz' &= -\ln(r - z) \\ \int_0^\infty \frac{\varrho^2}{r'^3} dz' &= \frac{z}{r} + 1 \\ \int_0^\infty \frac{\varrho(z - z')}{r'^3} dz' &= -\frac{\varrho}{r} \end{aligned} \quad (7.28)$$

den Spannungsfunktionentensor der Einzelkraft K in der positiven z -Richtung in Zylinderkoordinaten

$$\gamma^K = \frac{K}{16\pi G} \begin{pmatrix} -\frac{1}{m+1} \left(\frac{z}{r} + 1 \right) - \frac{m}{m+1} \ln(r - z) & 0 & \frac{1}{m+1} \frac{\varrho}{r} \\ 0 & -\left(\frac{z}{r} + 1 \right) - \frac{m}{m+1} \ln(r - z) & 0 \\ \frac{1}{m+1} \frac{\varrho}{r} & 0 & \frac{1}{m+1} \left(2 \ln(r - z) + \frac{z}{r} \right) \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

wobei nur die Singularität auf der positiven z -Achse (Verbindungsschlauch) auszunehmen ist. Natürlich hätte man die Singularität auch auf eine andere Kurve legen können, doch ist der der Symmetrie des Problems angepaßte Tensor (7.29) sicher die einfachste Lösung.

Zur Untersuchung der Singularität mit den Linienintegralen (1.5) und (1.6) benötigt man den Spannungsfunktionentensor $\underline{\chi}$ selbst; aus (7.29) folgt nach der von Kröner ([2], (II. 18)) angegebenen Umkehrung von (5.29)

$$\underline{\chi}^K = \frac{K}{8\pi} \begin{bmatrix} -\frac{m+2}{m+1} \ln(r-z) - \frac{2m}{m^2-1} \left(\frac{z}{r} + 1\right) & 0 & \frac{1}{m+1} \frac{\varrho}{r} \\ 0 & -\frac{m+2}{m+1} \ln(r-z) - \frac{m}{m-1} \left(\frac{z}{r} + 1\right) & 0 \\ \frac{1}{m+1} \frac{\varrho}{r} & 0 & \frac{2}{m^2-1} \left(\frac{z}{r} - 1\right) \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Wir wählen als Integrationsweg einen Kreis ϱ , $z = \text{const.}$ um die z -Achse. Dann kommen in den Linienintegralen nur die Komponenten der zweiten Zeile vor, und von diesen ist wiederum nur $\chi_{\varphi\varphi}$ von Null verschieden. Und da der Integrand von φ nicht abhängt, folgt daraus sofort

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \underline{\chi} = \int_0^{2\pi} \varrho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathbf{e}_\varphi \cdot \underline{\chi} = \int_0^{2\pi} \varrho \, \mathrm{d}\varphi \, \chi_{\varphi\varphi}(r, z) \, \mathbf{e}_\varphi = 0. \quad (7.31)$$

Weiter werden benötigt die Integrale

$$\oint \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \underline{\chi} \times \nabla = \int_0^{2\pi} \varrho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathbf{e}_\varphi \cdot (\underline{\chi} \times \nabla) \quad (7.32)$$

und, mit $\mathbf{r}_0 = z \mathbf{f}$

$$\oint (\mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \underline{\chi} \times \nabla) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \int_0^{2\pi} \varrho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathbf{e}_\varphi \cdot (\underline{\chi} \times \nabla) \times \varrho \, \mathbf{e}_\varrho \quad (7.33)$$

Nach einer etwas langwierigen, hier übergangenen Zwischenrechnung folgt in Zylinderkoordinaten

$$\underline{\chi} \times \nabla = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi_{\varrho z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \chi_{\varrho\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{\varrho} \chi_{\varphi z} & -\frac{\partial \chi_{\varrho\varrho}}{\partial z} - \frac{\partial \chi_{\varrho z}}{\partial \varrho} & -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho \chi_{\varrho\varphi})}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi_{\varrho\varrho}}{\partial \varphi} - \frac{1}{\varrho} \chi_{\varphi\varrho} \\ -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \chi_{\varphi\varphi}}{\partial z} - \frac{1}{\varrho} \chi_{\varrho z} & -\frac{\partial \chi_{\varphi\varrho}}{\partial z} + \frac{\partial \chi_{\varphi z}}{\partial \varrho} & -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho \chi_{\varphi\varphi})}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi_{\varphi\varrho}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varrho} \chi_{\varrho\varrho} \\ -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi_{z z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \chi_{z\varphi}}{\partial z} & -\frac{\partial \chi_{z\varrho}}{\partial z} + \frac{\partial \chi_{z z}}{\partial \varrho} & -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho \chi_{z\varphi})}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi_{z\varrho}}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

und daraus nach Einsetzen von (7.30)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\varphi \cdot (\underline{\chi} \times \nabla) &= \frac{K}{8\pi} \left\{ \left(-\frac{1}{r} + \frac{m}{m-1} \frac{z^2}{r^3} \right) \mathbf{e}_\varrho \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{m}{m+1} \frac{1}{\varrho} \left(\frac{z}{r} + 1 \right) + \frac{m+2}{m+1} \frac{\varrho}{r(r-z)} - \frac{m}{m-1} \frac{\varrho z}{r^3} \right] \mathbf{f} \right\} \quad (7.35) \end{aligned}$$

Man folgert daraus sofort das Verschwinden von (7.33); es bleibt also nur noch der Beitrag von (7.32), und von der Dyname auf das dem Ursprung zugewandte Ufer einer kreisförmigen Schnittfläche durch die z -Achse (Normale des Schnittufers ist $+\mathbf{f}$) die resultierende Kraft nach (1.5)

$$\vec{P} = \oint d\mathbf{r} \cdot \underline{\chi} \times \nabla = \frac{K \varrho}{4} [\dots] \mathbf{f} \quad (7.36)$$

Zieht man nun den Kreisumfang über der positiven z -Achse zusammen, so ergibt sich für die einzelnen Glieder der eckigen Klammer

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\varrho} \left(\frac{z}{r} + 1 \right) &= \frac{2}{\varrho} \quad ; \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho}{r(r-z)} = \frac{2}{\varrho} \\ \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho z}{r^3} &= 0 \end{aligned} \quad (7.37)$$

Beim Zusammenziehen über der negativen z -Achse verschwinden alle Glieder. Somit folgt

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \vec{P} = \begin{cases} K \mathbf{f} & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad (7.38)$$

Die Deutung als Singularität eines fiktiven Eigenspannungszustandes in Analogie zu (6.12—13) und Abb. 9, S. 40 ist danach evident.

5. Der Spannungsfunktionentensor einer Doppelkraft mit Moment. Wir denken uns eine Kraft $K \mathbf{f}$ im Ursprung und eine Kraft $-K \mathbf{f}$ an der Stelle

$$-\delta \mathbf{l} = -i \delta l \quad (7.39)$$

angebracht; die Doppelkraft hat das Moment

$$-K \delta l \mathbf{j} = -M \mathbf{j}. \quad (7.40)$$

Die Spannungsfunktionen dieser Doppelkraft erhält man dann für $|\mathbf{r}| \gg |\delta \mathbf{l}|$ aus

$$\begin{aligned} \underline{\chi}^{-M \mathbf{j}} &= -\underline{\chi}^K(\mathbf{r} + \delta \mathbf{l}) + \underline{\chi}^K(\mathbf{r}) = -\delta \mathbf{l} \cdot \nabla \underline{\chi}^K(\mathbf{r}) \\ &= -\delta l (e_\varrho \cos \varphi - e_\varphi \sin \varphi) \cdot \left(e_\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} e_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \underline{\chi}^K(\mathbf{r}) \\ &= \delta l \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \underline{\chi}^K(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (7.41)$$

Das Sternchen im Index soll daran erinnern, daß es sich hier keineswegs um eine reine Momentensingularität handelt; eine solche könnte man erst daraus gewinnen durch Addition eines zusammengesetzten Kräftedipols

$$\underline{P}^* = -\frac{1}{2} \delta l K (\mathbf{f} \mathbf{i} + \mathbf{i} \mathbf{f}) \quad (7.42)$$

dessen Spannungsfunktionen sich wiederum gewinnen ließen durch Überlagerung zweier einfacher Kräftedipole entgegengesetzten Vorzeichens mit $\underline{P} = \pm \frac{K}{2} \delta l$ in der 2. und 1. Mediane der zx -Ebene, also durch Überlagerung

zweier Tensoren vom Typ (7.20) nach Drehung um $\pm \frac{\pi}{4}$ um die y -Achse. Eine andere Möglichkeit, zu einer reinen Momentensingularität zu gelangen, besteht im Hinzufügen einer weiteren, um $\frac{\pi}{2}$ um die y -Achse gedrehten Doppelkraft mit Moment (vgl. dazu in der Ebene [23]); dazu muß der Tensor (7.41) gedreht oder, wenn eine zweite singuläre Linie vermieden werden soll, ein neuer Spannungsfunktionentensor aus den Spannungsfunktionen der Einzelkraft in x -Richtung mit singulärem Verbindungsschlauch auf der positiven z -Achse aufgestellt werden. Wir verzichten auf diese Ergänzung und erhalten durch Ausrechnen von (7.41)*

$$\underline{\chi}^{-M^*i} = \frac{M}{8\pi} \begin{pmatrix} \cos \varphi \left(\frac{m+2}{m+1} \frac{\varrho}{r(r-z)} - \frac{2m}{m^2-1} \frac{\varrho z}{r^3} \right) & \frac{\sin \varphi}{\varrho} \frac{m}{m+1} \left(\frac{z}{r} + 1 \right) & -\frac{\cos \varphi}{m+1} \frac{z^2}{r^3} \\ \frac{\sin \varphi}{\varrho} \frac{m}{m+1} \left(\frac{z}{r} + 1 \right) & \cos \varphi \left(\frac{m+2}{m+1} \frac{\varrho}{r(r-z)} - \frac{m}{m-1} \frac{\varrho z}{r^3} \right) & \frac{\sin \varphi}{m+1} \frac{1}{r} \\ -\frac{\cos \varphi}{m+1} \frac{z^2}{r^3} & \frac{\sin \varphi}{m+1} \frac{1}{r} & \frac{2 \cos \varphi}{m^2-1} \frac{\varrho z}{r^3} \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

Zur Bestimmung der Umlaufintegrale (1.5) und (1.6) auf Kreisen um die z -Achse berechnet man zunächst (7.31). Aus (7.43) ergibt sich mit (7.37) nach kurzer Rechnung

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \oint d\mathbf{r} \cdot \underline{\chi} = \begin{cases} \frac{M}{2} \mathbf{i} & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad (7.44)$$

Für die beiden Integrale (7.32–33) erhält man aus (7.34) und (7.37)

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \epsilon_{\varphi} \cdot (\underline{\chi}^{-M^*i} \times \nabla) = \begin{cases} \frac{M}{4\pi} \cos \varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{m^2 + 2m - 2}{m^2 - 1} + \frac{2}{\varrho^2} \right) \mathbf{k} & \text{für } z > 0 \\ -\frac{M}{4\pi} \cos \varphi \frac{1}{r^2} \frac{m^2 + m - 1}{m^2 - 1} \mathbf{k} & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad (7.45)$$

Integration vor dem endgültigen Grenzübergang zeigt dann, daß (7.32) verschwindet. Einsetzen in (7.33) gibt schließlich

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \int d\mathbf{r} \cdot (\underline{\chi} \times \nabla) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \frac{M}{2} \mathbf{i} & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad (7.46)$$

Durch Addition nach (1.5) und (1.6) folgt das Ergebnis

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \vec{P} = 0 \quad (7.47)$$

und

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \vec{M}_0 = \begin{cases} -M \mathbf{i} & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad (7.48)$$

* Selbstverständlich müssen dabei auch die Basisvektoren differenziert oder, was auf dasselbe herauskommt, die skalaren Komponenten kovariant abgeleitet werden.

Die singuläre Extraspannung im Verbindungsschlauch entspricht also ungefähr dem Spannungszustand des Balkens unter konstantem Biegemoment. Über die Einzelheiten dieses singulären Spannungsverlaufs sind keine weiteren Aussagen möglich oder auch nur sinnvoll. Insbesondere läßt sich die Verteilung des Moments auf die Integrale (7.44) und (7.46) durch Hinzufügen eines Deformators zur Spannungsfunktion beliebig verändern; sie hängt also vom speziellen Ansatz für die Spannungsfunktionen ab und hat darüber hinaus keine physikalische Bedeutung.

8. Der *Schaefer*sche Spannungsfunktionentensor für die Einzelkraft im unendlichen Raum

Aus denselben Gründen wie in § 7 ist auch hier der wirkliche Lastspannungszustand durch einen fiktiven Eigenspannungszustand zu ersetzen, den wir — ebenfalls unter Ersatz der Druck-Extraspannung durch eine Zug-Extraspannung — genau so wählen wie zu Anfang von § 7 beschrieben wurde. Über die Lösung von Eigenspannungsproblemen mit *Schaefer*schen Spannungsfunktionen wurde bisher nichts veröffentlicht, deshalb seien zunächst einige allgemeine Bemerkungen dazu vorausgeschickt. Bekanntlich (vgl. z. B. [2, 5, 7, 21, 30, 31]) gilt bei Anwesenheit einer nicht durch elastische Spannungen veranlaßten Dehnung, einer sog. Extradehnung $\underline{\varepsilon}^Q$ die Gleichung

$$\underline{\varepsilon}^G \equiv \text{Def } \underline{u} = \underline{\varepsilon}^Q + \underline{\varepsilon}^E \quad (8.1)$$

$\underline{\varepsilon}^Q$ kann z. B. durch plastische Verformung, Erwärmung, Magnetostriktion usw. verursacht sein. Ferner gilt für die elastische Dehnung $\underline{\varepsilon}^E$ und die Gesamtspannung $\underline{\sigma}^G$ das *Hookesche* Gesetz

$$\underline{\sigma}^G = \underline{c} \cdot \underline{\varepsilon}^E \quad (8.2)$$

und für $\underline{\sigma}^G$ die Gleichgewichtsbedingung (1.3), die auch hier nach (1.2) durch Ableitung aus einem Spannungsfunktionentensor identisch erfüllt werden kann. An die Stelle der Differentialgleichung (2.10) tritt aber jetzt

$$\text{Ink } (\underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi}) = \underline{\eta} \quad (8.3)$$

mit

$$\underline{\eta} = - \text{Ink } \underline{\varepsilon}^Q \quad (8.4)$$

Nach *Schaefer**) wird nun im isotropen Medium (8.3) identisch erfüllt, wenn man an Stelle von (5.42) setzt

$$\begin{aligned} \underline{\chi} &= \underline{\psi} + \Omega \underline{I} \\ \Delta \Omega &= \frac{m}{m-1} (\nabla \cdot \underline{\psi} \cdot \nabla - \Delta \psi_1) \\ \Delta \underline{\psi} &= -2G \underline{\varepsilon}^Q \end{aligned} \quad (8.5)$$

*) Mündl. Mitt.

Den Beweis führen wir mit Hilfe der bekannten Entwicklung des Operators Ink (vgl. z. B. [12], (10))

$$\begin{aligned}\text{Ink } \underline{\chi} &= \Delta \underline{\chi} - \nabla \nabla \cdot \underline{\chi} - \underline{\chi} \cdot \nabla \nabla + \nabla \cdot \underline{\chi} \cdot \nabla \mathbf{I} + \nabla \nabla \chi_1 - \Delta \chi_1 \mathbf{I} \\ (\text{Ink } \underline{\chi})_1 &= \nabla \cdot \underline{\chi} \cdot \nabla - \Delta \chi_1\end{aligned}\quad (8.6)$$

Anwendung auf die erste Gleichung (8.5) liefert

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}^a &= \text{Ink } \underline{\chi} = \text{Ink } \underline{\psi} + (\nabla \nabla - \Delta \mathbf{I}) \Omega \\ &= -2G \left(\underline{\varepsilon}^Q + \frac{\varepsilon_1^Q}{m-1} \mathbf{I} \right) - 2 \text{Def } \nabla \cdot \underline{\psi} - \frac{1}{m-1} \nabla \cdot \underline{\psi} \cdot \nabla \mathbf{I} + \nabla \nabla \psi_1 + \nabla \nabla \Omega\end{aligned}\quad (8.7)$$

und

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}^E &= \underline{s} \cdot \text{Ink } \underline{\chi} = \frac{1}{2G} \left[\text{Ink } \underline{\chi} - \frac{1}{m+1} (\nabla \cdot \underline{\chi} \cdot \nabla - \Delta \chi_1) \mathbf{I} \right] \\ &= -\underline{\varepsilon}^Q + \frac{1}{2G} (-2 \text{Def } \nabla \cdot \underline{\psi} + \nabla \nabla \psi_1 + \nabla \nabla \Omega)\end{aligned}\quad (8.8)$$

In der letzten Klammer steht ein reiner Deformator; somit ist die Erfüllung von (8.3) evident. Vergleich mit (8.1) liefert als Erweiterung der *Schaefer*schen Formeln ([11], (1.6)) und ([12], (7.18)) auf den Fall der Eigenspannungen bis auf eine starre Bewegung

$$\mathbf{u} = \frac{1}{G} \left(-\nabla \cdot \underline{\psi} + \frac{1}{2} \nabla \psi_1 + \frac{1}{2} \nabla \Omega \right)^* \quad (8.9)$$

Nun setzen wir die fiktive Extraspannung σ^{K*} zur Kraft $K\mathbf{f}$ als Liniensingularität auf der positiven z -Achse an; in symbolischer Schreibweise mit Distributionen ist dann in Zylinder- und in kartesischen Koordinaten

$$\underline{\sigma}^{K*} = K \delta^{(1)}(x) \delta^{(1)}(y) \delta^{(0)}(z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

Die zugehörige fiktive Extradehnung ε^{K*} berechnet man daraus nach dem negativen *Hookeschen* Gesetz [5], ([7], (1.5)) zu

$$\underline{\varepsilon}^{K*} = \frac{K}{2G} \delta^{(1)}(x) \delta^{(1)}(y) \delta^{(0)}(z) \begin{bmatrix} \frac{1}{m+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m+1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{m+1} \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

Zur Bestimmung von ψ benötigt man also nach der dritten Gleichung (8.5) das Potential $U(\mathbf{r})$ der Einheits-Quellbelegung auf der positiven z -Achse; nach (7.28) leitet man dafür leicht ab

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \ln(r-z) \quad (8.12)$$

*) Die Übereinstimmung folgt sofort aus der Substitution (5.41). Wegen der gegenüber [12] abgeänderten Vorzeichenkonvention gilt ([11], (1.6)) mit umgekehrtem Vorzeichen.

und findet

$$\underline{\psi} = \frac{K \ln(r-z)}{4\pi(m+1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

Zur Berechnung von Ω benötigt man noch

$$\nabla \cdot \underline{\psi} \cdot \nabla - \Delta \psi_I = \frac{K}{4\pi} \left\{ \frac{z}{r^3} - \frac{m-1}{m+1} \Delta \ln(r-z) \right\} \quad (8.14)$$

und erhält damit aus der zweiten Gleichung (8.5), wie leicht nachzurechnen

$$\Omega = \frac{K}{4\pi} \left\{ -\frac{m}{2(m-1)} \frac{z}{r} - \frac{m}{m+1} \ln(r-z) \right\} \quad (8.15)$$

Durch Zusammenfassen nach der ersten Gleichung (8.5) erhält man schließlich den *Schaefer*schen Spannungsfunktionentensor der Einzelkraft im unendlichen Raum

$$\underline{\underline{z}}^K = \frac{K}{4\pi} \begin{bmatrix} -\ln(r-z) - \frac{m}{2(m-1)} \frac{z}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\ln(r-z) - \frac{m}{2(m-1)} \frac{z}{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{2(m-1)} \frac{z}{r} \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

und zwar, da nur Hauptdiagonalglieder vorkommen, sowohl in Zylinder- als auch in kartesischen Koordinaten.

Zur Untersuchung der Singularität hat man wieder die Integrale (7.31–33) zu berechnen. Man erkennt sofort, daß (7.31) verschwinden muß. Mit (7.34) folgt

$$\begin{aligned} & \mathfrak{e}_q \cdot (\underline{\underline{z}} \times \nabla) \\ &= \frac{K}{4\pi} \left\{ \mathfrak{e}_q \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{2(m-1)} \frac{q^2}{r^3} \right) + \mathfrak{f} \left(\frac{q}{r(r-z)} - \frac{m}{2(m-1)} \frac{qz}{r^3} \right) \right\} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Auch (7.33) verschwindet bei der Integration, unabhängig vom Grenzwert des Klammerinhalts von (8.17), und es bleibt nach (1.5) und (7.32) mit (7.37)

$$\lim_{q \rightarrow 0} \vec{P} = \lim_{q \rightarrow 0} \oint d\mathbf{r} \cdot \underline{\underline{z}} \times \nabla = \begin{cases} K \mathfrak{f} & \text{für } z > 0 \\ 0 & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad (8.18)$$

Man erhält also wieder die Singularität (7.38), wie erwartet. Auf die Berechnung des Spannungsfunktionentensors der Doppelkraft sei hier verzichtet.

Wir sind mit dem *Schaefer*schen Ansatz wesentlich rascher zum Ziel gekommen als mit den *Kröner-Marguerres*chen Spannungsfunktionen. Zum Teil liegt das natürlich daran, daß wir die Ergebnisse des vorigen Paragraphen mitbenutzt haben, zum Teil aber auch daran, daß wir durch die beim *Schaefer*schen Ansatz mögliche unmittelbare Verwendung der Extradehnung eine Integrationsstufe eingespart haben. Dieser Vorteil kommt überall dort zur Geltung, wo die Extradehnung selbst gegeben ist oder sich — bis auf

einen unwesentlichen Deformator — sehr leicht aus der Versetzungsdichte integrieren läßt. Normalerweise dürfte aber bei gegebener Versetzungsdichte α die Integration in einem Zuge nach der von *Kröner* angegebenen Gleichung ([2], (II, 105)) oder nach der leicht daraus abzuleitenden, wie (2.20) und (2.26) über den ganzen unendlichen Raum zu erstreckenden Integralformel

$$\gamma = \frac{1}{8\pi} \left\{ \alpha(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\tau \right\}^{sym} \quad (8.19)$$

rascher zum Ziele führen.

Es hängt also ganz von den Besonderheiten des Einzelfalles ab, welchen Ansatz man zweckmäßigerweise für die Spannungsfunktionen verwendet.

Zusatz bei der Korrektur: Die Spannungsfunktionen (8.16) finden sich — bis auf die andere Lage der Singularitäten und ein Versehen im Logarithmus — bereits bei *Indenbom* ([46], Gl. (17)). Interessant ist auch der dort angegebene unsymmetrische Spannungsfunktionentensor 1. Ordnung ([46], Gl. (14–15)). Seine Untersuchung mit den nach (2.21) den *Peretti-Güntherschen* Integralen (1.5–6) entsprechenden Formeln

$$\vec{P} = \oint d\mathbf{r} \cdot \underline{\varphi} \quad (8.20)$$

und

$$\vec{M}_0 = - \oint d\mathbf{r} \cdot \underline{\varphi} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int \underline{\varphi} \cdot d\mathbf{f} \quad (8.21)$$

offenbart singuläre Eigenspannungen auf den sechs Koordinaten-Halbachsen, welche zu gleichen Teilen die Einzelkraft im Ursprung „tragen“. Über die Bedeutung dieser Singularitäten für das von *Indenbom* untersuchte Problem der Einflußfunktion der Eigenspannungsquellen auf die Verschiebung soll an anderer Stelle berichtet werden [47].

9. Der *Schaefer*sche Spannungsfunktionentensor der Belastungssingularität am Halbraum

(Probleme von *Boussinesq* und *Cerutti*).

Auf Grund differentiell-statischer Betrachtungen hat *Schaefer* [11] die Oberflächenbedingungen für den Spannungsfunktionentensor bei vorgegebener Oberflächenbelastung abgeleitet und danach speziell das Randwertproblem für eine allgemeine Belastungssingularität am Halbraum gelöst. Wir suchen dasselbe Ziel auf einem anderen Wege zu erreichen, dessen Grundgedanken sich ebenfalls bei *Schaefer* an anderer Stelle [19] finden und dort zur Aufstellung der Spannungsfunktionen des zweidimensionalen, ebenen Kontinuums benutzt werden (vgl. (5.27–28)). Auch hier wird das Lastspannungsproblem durch ein fiktives Eigenspannungsproblem ersetzt; die fiktive Extraspannung liegt jetzt aber nicht mehr im untersuchten Bereich (B) in Abb. 11, S. 42, sondern in der aufgesetzten Stange (D) und der Fläche (F), welche Kräfte und Momente von einem Teil der Oberfläche von (B) zum anderen übertragen. Der singuläre Spannungszustand in der Stange wird nach (5.6) durch eine geeignete Mehrwertigkeit des erzeugenden Vektors \mathfrak{A} der Nullspannungsfunktionen im Außenraum wiedergegeben.

Den von *Schaefer* behandelten Fall der Platte bzw. Scheibe erhält man durch Abflachung des Bereichs (*B*) und, bei der Einzeldyname, durch Aufbiegen der Stange zur Senkrechten auf der Plattenebene (§ 5c, 2.). Auch wir biegen für das vorliegende Problem die Stange in dieser Weise auf, ziehen jedoch den Bereich (*B*) zum unteren Halbraum auseinander. Bei Verwendung *Schaefer*scher Spannungsfunktionen muß die Nullspannungsfunktion (5.45) auch den dort hergeleiteten Nebenbedingungen genügen; wir verwenden hier die hinreichende Bedingung, daß der erzeugende Vektor \mathfrak{A} harmonisch sein muß*), also

$$\Delta \mathfrak{A} = 0 \quad (9.1)$$

Der Übergang zum Körperinnern wird dann nach (1.5) und (1.6) durch die „statischen Randbedingungen“ (vgl. auch Fußnote S. 15. (2.11a—b'))

$$\mathbf{n} \times \underline{\chi} = \mathbf{n} \times \text{Def } \mathfrak{A} \quad (9.2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \overline{\nabla \mathbf{n} \times \underline{\chi} \times \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \overline{\nabla \mathbf{n} \times \text{Def } \mathfrak{A} \times \mathbf{n}} \quad (9.3)$$

vermittelt; diese sind durch einen harmonischen Tensor $\underline{\psi}$ und einen Skalar Ω nach (5.42) zu erfüllen.

a) Das Problem von *Boussinesq* am Halbraum

Wir wählen in (5.6) als Bezugspunkt τ_0 den Angriffspunkt *O* der Kraft $K_z \mathbf{i}$. Dann ist der geforderte Sprung bei einem Umlauf um die singuläre Stange in der *z*-Achse

$$\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1 = -K_z \varrho \mathbf{e}_\varphi \quad (9.4)$$

Ein Vektorfeld, das diese Sprungbedingung erfüllt, ist

$$\mathfrak{A}' = -\frac{K_z}{2\pi} \varrho \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (9.5)$$

Es ist jedoch nicht harmonisch; vielmehr gilt

$$\Delta \mathfrak{A}' = -\frac{K_z}{2\pi} \left(-\frac{2}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi \right) \quad (9.6)$$

Nun ist ein einwertiges Vektorfeld zu bestimmen, das die rechte Seite von (9.6) gerade aufhebt; ein solches findet man in

$$\mathfrak{A}'' = -\frac{K_z}{2\pi} \varrho \ln \varrho^{**}) \quad (9.7)$$

*) Unter einem harmonischen Vektor sei hier ein Vektor mit harmonischen Komponenten in kartesischen Koordinaten verstanden. Quellen- und Wirbelfreiheit wird nicht verlangt.

**) Ein erzeugender Vektor dieser Form könnte, wenn überhaupt, höchstens zu einer Spannungssingularität der Ordnung r^{-2} führen; eine solche ist aber durch seine Einwertigkeit ausgeschlossen. Nach *Sternberg* und *Eubanks* [40] ist also die Abwesenheit höherer Singularitäten gesichert.

Ferner fügen wir zur Beseitigung einer überflüssigen Konstanten im Deformator noch hinzu

$$\mathfrak{A}''' = -\frac{K_z}{2\pi}(-\varrho \mathbf{e}_\varrho) \quad (9.8)$$

und erhalten so das endgültige erzeugende Vektorfeld im Außenraum

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}''' = -\frac{K_z}{2\pi}[\varrho \varphi \mathbf{e}_\varphi + \varrho (\ln \varrho - 1) \mathbf{e}_\varrho] \quad (9.9)$$

Dazu berechnen wir den Deformator

$$\underline{\chi}^a = \text{Def } \mathfrak{A} = -\frac{K_z}{2\pi} \ln \varrho (\mathbf{e}_\varrho \mathbf{e}_\varrho + \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \quad (9.10)$$

und erhalten daraus die statischen Randbedingungen nach (9.2)

$$\underline{\chi}|_{z=0} = -\frac{K_z}{2\pi} \begin{pmatrix} \ln \varrho & 0 & 0 \\ 0 & \ln \varrho & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

(Strich bedeutet „keine Randbedingung“) und nach (9.3)

$$\frac{\partial}{\partial z} \underline{\chi} \Big|_{z=0} = -\frac{K_z}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

Die Randbedingungen (9.11) werden nun erfüllt durch den harmonischen Tensor

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} -\frac{K_z}{2\pi} \ln(r-z) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_z}{2\pi} \ln(r-z) & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{zz} \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

mit unbestimmten ψ_{zz} . Setzt man außerdem

$$\Omega = -\frac{K_z}{2\pi} \frac{z}{r} \quad (9.14)$$

also gleich dem Produkt von z mit einer harmonischen Funktion, so ist auch die Erfüllung von (9.12) gesichert. Nun gilt aber andererseits nach der zweiten Gleichung (5.42)

$$\Delta \Omega = \frac{m}{m-1} \left(\frac{K_z}{2\pi} \frac{z}{r^3} + \frac{\partial^2 \psi_{zz}}{\partial z^2} \right) \quad (9.15)$$

was auf

$$\frac{\partial^2 \psi_{zz}}{\partial z^2} = \frac{K_z}{2\pi} \frac{m-2}{m} \frac{z}{r^2} \quad (9.16)$$

führt. Die im Unendlichen weniger als linear zunehmende, harmonische Lösung von (9.16) ist

$$\psi_{zz} = \frac{K_z}{2\pi} \frac{m-2}{m} \ln(r-z) \quad (9.17)$$

Es ergibt sich für das Problem von *Boussinesq* somit der *Schaefer'sche* Spannungsfunktionentensor

$$\underline{\mathfrak{L}}^{K_z} = \frac{K_z}{2\pi} \begin{bmatrix} -\ln(r-z) - \frac{z}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\ln(r-z) - \frac{z}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m-2}{m} \ln(r-z) - \frac{z}{r} \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von *Schaefer* [11].

Zusatz bei der Korrektur: Derselbe Spannungsfunktionentensor wurde — bis auf die Vertauschung von oberem und unterem Halbraum und ein Versehen im Logarithmus — kurz nach *Schaefer* [11] auch von *Indenbom* ([46], Gl. (19)) gefunden und zur Berechnung der Verschiebung der Oberfläche im Spannungsfeld einer dazu senkrechten Stufenversetzung benützt.

b) Das Problem von *Cerutti* am Halbraum

Legt man den Bezugspunkt r_0 wieder in den Angriffspunkt O der Kraft mit den Komponenten K_x und K_y , so muß bei einem Umlauf um die z -Achse der erzeugende Vektor nach (5.6) um

$$\mathfrak{Q}_2 - \mathfrak{Q}_1 = -(K_x \mathbf{i} + K_y \mathbf{j}) \times \mathbf{r} = -K_y z \mathbf{i} + K_x z \mathbf{j} + (K_x y - K_y x) \mathbf{k} \quad (9.21)$$

springen. Einen solchen Sprung besitzt das Vektorfeld

$$\mathfrak{Q}' = \frac{z}{2\pi} (-K_y \mathbf{i} + K_x \mathbf{j}) - \frac{y}{2\pi} K_x \mathbf{k} + \frac{x}{2\pi} K_y \mathbf{k} \quad (9.22)$$

Es ist jedoch nicht harmonisch; vielmehr gilt

$$\Delta \mathfrak{Q}' = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{2x}{\varrho^2} K_x \mathbf{k} - \frac{2y}{\varrho^2} K_y \mathbf{k} \right) \quad (9.23)$$

Dies wird ausgeglichen durch das einwertige Vektorfeld

$$\mathfrak{Q}'' = \frac{1}{2\pi} (x \ln \varrho K_x \mathbf{k} + y \ln \varrho K_y \mathbf{k})^{**} \quad (9.24)$$

Aus diesen beiden Vektoren folgt der Gradiententensor in kartesischen Koordinaten

$$\nabla (\mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}'') = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{yz}{\varrho^2} K_y & -\frac{yz}{\varrho^2} K_x & (\ln \varrho + 1) K_x + \varrho K_y \\ -\frac{xz}{\varrho^2} K_y & \frac{xz}{\varrho^2} K_x & (\ln \varrho + 1) K_y - \varrho K_x \\ -\varphi K_y & \varphi K_x & 0 \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

*) Die Komponentenfunktionen sind von der *Airy'schen* Spannungsfunktion der Stufenversetzung bekannt [3].

**) Vgl. Fußnote zu (9.7), S. 55.

Die aus dem symmetrischen Teil dieses Tensors abzuleitenden Randbedingungen führen für das harmonische $\psi_{xy} = \chi_{xy}$ noch auf einen Widerspruch. Denn einerseits müßte nun nach (9.2) χ_{xy} auf dem Rande und damit im ganzen Halbraum verschwinden; andererseits verlangt die Randbedingung (9.3) mit (9.25) eine nicht verschwindende Normalableitung. Um diesen Widerspruch durch Nullsetzen der Normalableitung zu beseitigen, fügen wir einen weiteren Nullspannungsfunktionsensor hinzu mit dem harmonischen und einwertigen erzeugenden Vektor

$$\mathfrak{A}''' = \frac{1}{2\pi} z \ln \varrho (K_x i + K_y j)^* \quad (9.26)$$

und zur Elimination überflüssiger Konstanten

$$\mathfrak{A}'''' = -\frac{1}{2\pi} (x K_x + y K_y) \mathfrak{k} \quad (9.26a)$$

Zusammenfassung führt auf den Tensor der Nullspannungsfunktionen im Außenraum

$$\underline{\mathfrak{z}}^a = \text{Def} (\mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}''' + \mathfrak{A}''') = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} (x K_x + y K_y) \frac{z}{\varrho^2} & 0 & K_x \ln \varrho \\ 0 & (x K_x + y K_y) \frac{z}{\varrho^2} & K_y \ln \varrho \\ K_x \ln \varrho & K_y \ln \varrho & 0 \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

und damit auf die Randbedingungen

$$\chi \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_x \ln \varrho \\ 0 & 0 & K_y \ln \varrho \\ K_x \ln \varrho & K_y \ln \varrho & - \end{pmatrix} \quad (9.28)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z} \chi \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} (x K_x + y K_y) \frac{1}{\varrho^2} & 0 & - \\ 0 & (x K_x + y K_y) \frac{1}{\varrho^2} & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \quad (9.29)$$

Daraus folgt sofort

$$\underline{\psi} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_x \ln(r-z) \\ 0 & 0 & K_y \ln(r-z) \\ K_x \ln(r-z) & K_y \ln(r-z) & 2\pi \psi_{zz} \end{pmatrix} \quad (9.30)$$

und nach der zweiten Gleichung (5.42)

$$\Delta \Omega = \frac{1}{2\pi m-1} \left(2 K_x \frac{\partial^2 \ln(r-z)}{\partial x \partial z} + 2 K_y \frac{\partial^2 \ln(r-z)}{\partial y \partial z} + 2\pi \frac{\partial^2 \psi_{zz}}{\partial z^2} \right) \quad (9.31)$$

*) Vgl. Fußnote zu (9.7), S. 55.

oder nach teilweisem Ausdifferenzieren

$$\Delta \Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{m}{m-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(2 K_x \frac{x}{r(r-z)} + 2 K_y \frac{y}{r(r-z)} + 2\pi \frac{\partial \psi_{zz}}{\partial z} \right) \quad (9.32)$$

Andererseits werden die restlichen Randbedingungen erfüllt durch

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{z}{r(r-z)} (x K_x + y K_y) \quad (9.33)$$

Wendet man darauf den *Laplace*-Operator an und vergleicht mit (9.32), so folgt

$$\frac{\partial^2 \psi_{zz}}{\partial z^2} = -\frac{2}{m} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_x \frac{x}{r(r-z)} + K_y \frac{y}{r(r-z)} \right) \quad (9.34)$$

ψ_{zz} ist danach nur bis auf das Produkt von z mit einer singularitätenfreien harmonischen Funktion von x und y bestimmt; sollen jedoch die Spannungen im Unendlichen abklingen, so kann sie höchstens linear sein und ist damit, wie man leicht nachprüft, ohne Einfluß auf die Spannungen. Wir setzen sie also gleich Null und finden

$$\begin{aligned} \psi_{zz} &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{2\pi} \left(K_x \frac{\partial}{\partial x} + K_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (z \ln(r-z) + r) \\ &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{2\pi} (x K_x + y K_y) \left(\frac{z}{r(r-z)} + \frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (9.35)$$

Damit läßt sich nun nach der ersten Gleichung (5.42) in Übereinstimmung mit *Schaefer* [11] der Spannungsfunktionentensor des Problems von *Cerutti* zusammenstellen

$$\underline{\chi}^{K_x, K_y} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} (x K_x + y K_y) \frac{z}{r(r-z)} & 0 & K_x \ln(r-z) \\ 0 & (x K_x + y K_y) \frac{z}{r(r-z)} & K_y \ln(r-z) \\ K_x \ln(r-z) & K_y \ln(r-z) & (x K_x + y K_y) \left(\frac{2m-1}{2m} \frac{z}{r(r-z)} - \frac{1}{2m} \frac{1}{r} \right) \end{pmatrix} \quad (9.36)$$

Auf die entsprechenden Rechnungen für singuläre Momente [11] sei hier verzichtet.

e) Ausblick

Nach der beschriebenen Anwendung des fiktiven Eigenspannungszustandes im Außenraum auf singuläre Lastspannungsprobleme liegt der Gedanke einer Erweiterung auf kontinuierliche Lastverteilungen nahe. In der Tat kann man nun wenigstens beim Halbraum aus der Singularitätslösung rückwärts auf die Gleichungen ([11], (3.22)) von *Schaefer* schließen. Im allgemeinen Fall aber hätte man die Stange (D) in Abb. 11, S. 42 zu einem räumlichen Gebilde oder

gar zum vollen Außenraum auszuweiten; d. h. man käme auf ein zweites Randwertproblem für den Außenraum. Der Erfolg dieses Verfahrens bei singulären Belastungen beruht eben auf der außerordentlichen Einfachheit des „Randwertproblems“ für die singuläre Stange. Im andern Fall hätte man die kontinuierliche Oberflächenbelastung in geeigneter Weise als Gleichgewichtsspannung in den Außenraum fortzusetzen, dazu einen Spannungsfunktionentensor $\underline{\chi}^a$ zu bestimmen und daran über Anschlußbedingungen vom Typ (2.11a—b) an der Oberfläche das Spannungsfunktionfeld des Innenraumes anzuschließen. Man darf erwarten, daß sich diese Aufgabe in vielen Fällen durch geeignete Wahl des fiktiven Eigenspannungszustandes im Außenraum sehr vereinfachen läßt; besonders übersichtlich ist auch hier das Beispiel des Halbraumes. Darüber soll an anderer Stelle ausführlich berichtet werden [47].

Anhang zu § 2

a) Herleitung von (2.14)

Man erhält durch Einsetzen von (2.11) und (2.13) in die linke Seite von (2.14) und anschließende mehrfache Anwendung der Produktregel und des Satzes von *Stokes*

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int \underline{\chi}^- \cdot \cdot [\underline{d}\underline{f} \times (\underline{s}^- \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^-) \times \nabla] \\
 & - \frac{1}{2} \int (\underline{\chi}^- \times \nabla) \cdot \cdot [(\underline{s}^- \cdot \cdot \text{Ink } \underline{\chi}^-) \times \underline{d}\underline{f}] \\
 & = \frac{1}{8} \int (\nabla \underline{\mathfrak{A}}^- + \underline{\mathfrak{A}}^- \nabla) \cdot \cdot (\underline{d}\underline{f} \times \nabla \underline{u}^- \times \nabla) \\
 & - \frac{1}{8} \int (\underline{d}\underline{f} \times \nabla \underline{\mathfrak{A}}^- \times \nabla) \cdot \cdot (\nabla \underline{u}^- + \underline{u}^- \nabla) \\
 & = \frac{1}{8} \int (\underline{d}\underline{f} \times \nabla) \cdot (\nabla \underline{\mathfrak{A}}^- + \underline{\mathfrak{A}}^- \nabla) \cdot \underline{\nabla} \underline{u}^- \times \nabla \\
 & - \frac{1}{8} \int (\underline{d}\underline{f} \times \nabla) \cdot (\nabla \underline{u}^- + \underline{u}^- \nabla) \cdot (\underline{\mathfrak{A}}^- \times \nabla) \\
 & = -\frac{1}{8} \oint d\underline{r} \cdot (\nabla \underline{\mathfrak{A}}^- + \underline{\mathfrak{A}}^- \nabla) \cdot (\nabla \times \underline{u}^-) \\
 & + \frac{1}{8} \oint d\underline{r} \cdot (\nabla \underline{u}^- + \underline{u}^- \nabla) \cdot (\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}^-) \\
 & + \frac{1}{8} \int \underline{d}\underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}^-) (\nabla \times \underline{u}^-) \cdot \underline{\nabla} \\
 & - \frac{1}{8} \int \underline{d}\underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{u}^-) (\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}^-) \cdot \underline{\nabla} \\
 & = -\frac{1}{8} \oint d\underline{r} \cdot (\dots) + \frac{1}{8} \oint d\underline{r} \cdot (\dots) + \frac{1}{8} \int \underline{d}\underline{f} \cdot \{ \nabla \times [(\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}^-) \times (\nabla \times \underline{u}^-)] \} \\
 & = \frac{1}{8} \oint d\underline{r} \cdot \{ -2 (\text{Def } \underline{\mathfrak{A}}^-) \cdot (\nabla \times \underline{u}^-) + 2 (\text{Def } \underline{u}^-) \cdot (\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}^-) + (\nabla \times \underline{\mathfrak{A}}^-) \times (\nabla \times \underline{u}^-) \} \\
 & \text{also die rechte Seite von (2.14).}
 \end{aligned}$$

b) Schließungsstrom auf der Oberfläche (zu 2.20)

Wir setzen den Vektor der Oberflächenstromdichte an in der Form $\mathfrak{B} \times \mathbf{n}$. Damit erfordert die Kontinuitätsbedingung für jedes Teilstück der Oberfläche

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathfrak{B} = \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (2.20a)$$

und damit nach dem *Stokesschen* Satz

$$\int (d\mathbf{f} \times \nabla) \cdot \mathfrak{B} = \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (2.20b)$$

Nun sei

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, n) \quad (2.20c)$$

derart bestimmt, daß an der Oberfläche gilt

$$n = 0 \quad ; \quad \nabla n = \mathbf{n} \quad (2.20d)$$

Ferner machen wir für \mathfrak{B} den Ansatz

$$\mathfrak{B} = W^* \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \quad (2.20e)$$

legen also die Richtung der Oberflächenströmung senkrecht zu den Parameterlinien $v = \text{const.}$ auf der Oberfläche fest. Dann läßt sich der ∇ -Vektor auf der Oberfläche zerlegen ([9], § 225)

$$\nabla = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \quad (2.20f)$$

wobei wir noch das Spatprodukt der drei Basisvektoren

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \mathbf{n} \right] = \sqrt{EG-F^2} \quad (2.20g)$$

durch die drei ersten Fundamentalgrößen E, F, G ([9], § 48) der Oberfläche ausgedrückt haben, was hier wegen $\mathbf{n} \perp \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ ohne weiteres möglich ist. Einsetzen in die linke Seite von (2.20b) liefert nun

$$\begin{aligned} \int (d\mathbf{f} \times \nabla) \cdot \mathfrak{B} &= \int \left[\frac{d\mathbf{f}}{\sqrt{EG-F^2}} \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \right) \right] \cdot W^* \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \\ &= \int \frac{df}{\sqrt{EG-F^2}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \right) \cdot W^* \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \\ &= \int \frac{df}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ F \frac{\partial W^*}{\partial u} - E \frac{\partial W^*}{\partial v} + W^* \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v} \right) \right\} \quad (2.20h) \end{aligned}$$

Um die Ableitung nach u zu eliminieren, spezialisieren wir nun auf ein Orthogonalsystem mit $F = 0$ und erhalten durch Einführung der geodätischen Krümmung G_1 der Parameterlinien $v = \text{const.}$ ([9], § 49)

$$\int (d\mathbf{f} \times \nabla) \cdot \mathfrak{B} = \int df \left(- \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial W^*}{\partial v} + 2 W^* \sqrt{E} G_1 \right) \quad (2.20i)$$

Dies wird wieder in (2.20b) eingesetzt; da nun diese Gleichung für jedes beliebige Flächenstück gelten muß, dürfen wir die Integranden gleichsetzen und kommen so wegen $d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung für W^*

$$- \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial W^*}{\partial v} + 2 W^* \sqrt{E} G_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \quad (2.20k)$$

welche sich auf jeder einzelnen Stromlinie $u = \text{const.}$ für jeweils willkürlich vorgegebene Anfangswerte durch eine Quadratur lösen läßt; die Abhängigkeit von u ist zunächst willkürlich. Besonders einfach wird diese Quadratur, wenn die Parameterlinien $v = \text{const.}$ geodätische Linien sind, also das zweite Glied von (2.20k) verschwindet.

Die Abhängigkeit der Oberflächenströmung von u ist sicher dann ohne Bedeutung, wenn sich sämtliche Stromlinien schneiden, d. h. also bei einem Polarkoordinatensystem mit zwei „Polen“ auf der Oberfläche; dann wird man aber i. allg. auf die Benutzung geodätischer Linien verzichten müssen ([4], S. 196). Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Oberfläche stückweise mit geodätischen Parameterlinien $v = \text{const.}$ zu überdecken ([45], S. 102, 106); da dann jedoch die Ergiebigkeit der einzelnen Teilflächen nicht zu verschwinden braucht, müssen in den Begrenzungen der Teilflächen noch linear singuläre Schließungsströme eingeführt werden. Dasselbe gilt für Rotationsflächen, wenn man die Stromlinien entlang den Breitenkreisen legt. Dann muß i. allg. eine singuläre Stromlinie auf einem Meridian als eine Art „Rückgrat“ der Strömung noch für den Ausgleich zwischen den anderen, geschlossenen Stromlinien sorgen.

c) Umrechnung von (2.25) in (2.26)

Wir schreiben für die Umformung die Spannung als Dyadensumme [9]

$$\underline{\sigma}^G = \mathfrak{A}_r \mathfrak{B}_r \quad (2.25a)$$

und verwenden die nach ([2], (A.2)) leicht abzuleitende Hilfsformel

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}_r \times \mathbf{I} \times \mathfrak{B}_r)_{kl} &= \sigma_{ij} \epsilon_{kim} \epsilon_{lmj} = \sigma_{ij} \epsilon_{kim} \epsilon_{jlm} \\ &= -\sigma_{ij} (\delta_{kl} \delta_{ij} - \delta_{jk} \delta_{li}) = (\tilde{\sigma} - \sigma \mathbf{I})_{kl} \end{aligned} \quad (2.25b)$$

Dann folgt aus (2.25)

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{8\pi} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \underline{\sigma}(\mathbf{r}') \times \nabla d\tau' \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{A}_r(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathfrak{B}_r(\mathbf{r}') d\tau' \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathfrak{A}_r(\mathbf{r}') \times \mathbf{I} \times \mathfrak{B}_r(\mathbf{r}') - \mathfrak{A}_r(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathfrak{B}_r(\mathbf{r}') \right\} d\tau' \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\tilde{\sigma}(\mathbf{r}') - \sigma \mathbf{I}(\mathbf{r}') \mathbf{I}) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \underline{\sigma}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right\} d\tau' \end{aligned} \quad (2.25c)$$

also die Formel (2.26).

d) Herleitung von (2.7)

Das zweite Glied der zweiten Gleichung (2.6) zerfällt nach Anwendung der Produktregel der Differentialrechnung in zwei Summanden, deren erster sofort der rechte Seite von (2.7) liefert. Wegen

$$\nabla'(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \mathbf{I} \quad (2.6a)$$

kann man nun den zweiten Summanden nach (2.25b) umformen, wenn man an Stelle von $\underline{\sigma}$ den unsymmetrischen Tensor $\underline{\varepsilon}(\mathbf{r}') \times \nabla'$ einsetzt. Da der erste Skalar dieses Tensors wegen der Symmetrie von $\underline{\varepsilon}$ verschwindet, folgt nun, daß sich dieser zweite Summand gegen das erste Glied von (2.6) weghebt, womit (2.7) bewiesen ist. Umkehrung dieser Rechnung mit $\underline{\sigma}$ an Stelle von $\underline{\eta}$ liefert die Herleitung der *Peretti-Güntherschen* Gleichung (1.6).

Anhang zu § 5: Distributionen

Es sei

$$\delta^{(0)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < 0 \\ 1 & \text{für } z > 0 \end{cases} \quad (5.27a)$$

die *Heavisidesche* Sprungfunktion. Dann läßt sich die DIRACsche δ -Funktion als eine Art Ableitung von (5.27a) auffassen ([2], § 9)

$$\delta^{(1)}(z) = \frac{d}{dz} \delta^{(0)}(z) \quad (5.27b)$$

und man kann formal zu „Distributionen“ höherer Ordnung fortfahren nach der Rekursionsformel

$$\delta^{(n+1)}(z) = \frac{d}{dz} \delta^{(n)}(z) \quad (5.27c)$$

Natürlich kann es sich dabei nicht um Differentiationen im üblichen Sinne handeln; eine ausführliche analytische Begründung dieser nur formal der Differentiation entsprechenden Rechenoperationen hat *Schwartz* [28] gegeben. In vielen Fällen genügt es jedoch, wenn man die Distributionen als Grenzfälle einer Schar differenzierbarer Funktionen auffaßt, also z. B. für die *Heavisidesche* Sprungfunktion zunächst *Gauss'sche* Fehlerintegrale verschiedenen Parameters einsetzt. In anderen Fällen können die Distributionen als formale Umschreibung der Umkehrung anderweitig definierter Integrale aufgefaßt werden; in diesem Sinne repräsentiert dann z. B. im Raume $\delta^{(1)}(z)$ eine Einfachbelegung und $\delta^{(2)}(z)$ eine Doppelbelegung der Ebene $z = 0$, wie diese aus der Potentialtheorie bekannt sind. Die Ausdrücke für Linien- und Punktsingularitäten lassen sich danach ohne Schwierigkeiten als Produkte von Distributionen verschiedener Veränderlicher darstellen; so bedeutet z. B.

$$\delta^{(1)}(x-a) \delta^{(1)}(x-b) \delta^{(1)}(x-c) \quad (5.27d)$$

eine Punktsingularität an der Stelle (a, b, c) nach Art der räumlichen δ -Funktion von *Dirac*. Weiter bedeutet

$$\delta^{(0)}(F(r)) \quad (5.27e)$$

eine Funktion, die im Innern der Fläche

$$F(r) = 0 \quad (5.27f)$$

den Wert Null, im Äußeren den Wert Eins besitzt, und der Ausdruck

$$\nabla \delta^{(0)}(F(r)) = \delta^{(1)}(F) \nabla F \quad (5.27g)$$

eine singuläre Belegung der Oberfläche mit senkrecht stehenden Vektoren. Insbesondere gewinnt man mit

$$F(r) = n(r) \quad \text{mit } |\nabla n| = 1 \quad \text{für } n(r) = 0 \quad (5.27h)$$

eine zuweilen zweckmäßige Darstellung des Normaleneinheitsvektors n . Und bildet man von dem Vektorfeld

$$\delta^{(0)}(n) \mathbf{a}(r) \quad (5.27i)$$

formal die Divergenz

$$\nabla \cdot [\delta^{(0)}(n) \mathbf{a}(r)] = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}(r) \delta^{(1)}(n) + \nabla \cdot \mathbf{a}(r) \delta^{(0)}(n) \quad (5.27j)$$

so gibt das erste Glied der rechten Seite die singuläre Quelledichte auf der Oberfläche richtig wieder. Die letzten Beispiele zeigen allerdings auch, daß man die „naive“ Rechnung mit Distributionen nicht ohne weiteres auf krummlinige Koordinaten übertragen kann; insbesondere muß man dann gegebenenfalls auch über höhere Ableitungen der Funktion $n(r)$ auf der singulären Fläche in geeigneter Weise verfügen.

Literatur

- [1] *A. E. H. Love*: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge 1952.
- [2] *E. Kröner*: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Archive Rat. Mech. Anal. **4** (1960), S. 273.
- [3] *F. R. N. Nabarro*: The Mathematical Theory of Stationary Dislocations. Advances in Physics **1** (1952), S. 271.
- [4] *D. Hilbert* und *S. Cohn-Vossen*: Anschauliche Geometrie. Berlin 1932.
- [5] *G. Rieder*: Spannungen und Dehnungen im gestörten elastischen Medium. Z. Naturforschung **11a** (1956), S. 171, Berichtigung in [6].
- [6] *G. Rieder*: Plastische Verformung und Magnetostriktion. Z. angewandte Physik **9** (1957), S. 187.
- [7] *G. Rieder*: Eigenspannungen in unendlichen geschichteten und elastisch anisotropen Medien, insbesondere in Weissenbach'schen Bezirken und geschichteten Platten. Abh. d. Braunschwg. Wiss. Ges. **11** (1959), S. 20.
- [8] *J. M. Burgers*: Some considerations of the Field of Stress connected with Dislocations in a Regular Crystal Lattice I, II. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. **42** (1939), S. 293, 378.
- [9] *M. Lagally*: Vorlesungen über Vektor-Rechnung. Leipzig 1949.
- [10] *H. Schaefer*: Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums; statische Deutung und Randwerte. Ing.-Archiv **28** (1959), S. 291.
- [11] *H. Schaefer*: Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers. Z. angew. Math. Mech. **33** (1953), S. 356.
- [12] *E. Kröner*: Die Spannungsfunktionen der dreidimensionalen isotropen Elastizitätstheorie. Z. Physik **139** (1954), S. 175; Berichtigung Z. Physik **143** (1955), S. 374.
- [13] *W. Günther*: Spannungsfunktionen und Verträglichkeitsbedingungen der Kontinuumsmechanik. Abh. Braunschwg. Wiss. Ges. **6** (1954), S. 207.
- [14] *G. Rieder*: Examensarbeit Stuttgart 1955, unveröffentlicht.
- [15] *E. Madelung*: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin 1936.
- [16] *J. H. Michell*: Proc. London Math. Soc. (1) **31** (1899), S. 100.
- [17] *W. Prager*: On Plane Elastic Strain in Doubly-Connected Domains. Quarterly of Appl. Math. **3** (1945), S. 377.
- [18] *H. Schaefer*: Die vollständige Analogie Scheibe-Platte. Abh. Braunschwg. Wiss. Ges. **8** (1956), S. 142.
- [19] *H. Schaefer*: Die drei Spannungsfunktionen des zweidimensionalen ebenen Kontinuums. Österr. Ing.-Archiv **10** (1956), S. 267.
- [20] *G. Colomnetti*: Su di una reciprocità tra deformazioni e distorsioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V. Ser. **24/1** (1915), S. 404.
- [21] *W. Günther*: Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. Abh. d. Braunschwg. Wiss. Ges. **10** (1958), S. 195.
- [22] *G. Peretti*: Significato del tensore arbitrario che interviene nell'integrale generale delle equazioni della statica dei continui. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **3** (1949), S. 77.
- [23] *L. Föppl*: Drang und Zwang, 3. Bd. München 1947.
- [24] *J. D. Eshelby*: The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. Proc. Roy. Soc. London A **241** (1957), S. 376.
- [25] *K. Marguerre*: Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. **35** (1955), S. 242.
- [26] *E. Trefftz*: Mathematische Elastizitätstheorie. Handbuch der Physik, herausg. von H. Geiger und K. Scheel. Bd. 6, Mechanik der elastischen Körper, S. 46. Berlin 1928.
- [27] *C. Truesdell*: Invariant and Complete Stress Functions for General Continua. Archive Rat. Mech. Anal. **4** (1959), S. 1.
- [28] *L. Schwartz*: Théorie des distributions, Bd. I. Paris 1950.
- [29] *M. Brdicka*: On the General Form of the Beltrami Equation and Papkovitch's Solution of the Axially Symmetrical Problem of the Classical Theory of Elasticity. Czechoslov. Journ. Phys. **7** (1957), S. 262.
- [30] *K. Kondo*: R.A.A.G. Memoirs of the Unifying Study of Basic Problems in Engineering and Physical Sciences by Means of Geometry. Vol. I, Tokyo 1955. Vol. II., Tokyo 1958.
- [31] *B. A. Bilby*: Continuous Distributions of Dislocations. Progress in Solid Mechanics **1** (1960), S. 329.

- [32] *M. G. Slobodianskii*: General and Complete Solutions of the Equations of Elasticity. PMM (Journ. Appl. Math. Mech.) **23** (1959), S. 666.
- [33] *J. D. Eshelby*: The Force on an Elastic Singularity. Philos. Trans. Roy. Soc. London A **244** (1951), S. 87. The Continuum Theory of Lattice Defects. Solid State Physics III (1956), S. 79. New York 1956.
- [34] *G. Rieder*: Mechanische Arbeit bei plastischen Vorgängen. Z. angewandte Physik **10** (1958), S. 140.
- [35] *H. B. Phillips*: Vector Analysis. New York — London 1933.
- [36] *O. D. Kellog*: Foundations of Potential Theory. Berlin 1929.
- [37] *W. Lietzmann*: Anschauliche Topologie. München 1955.
- [38] *G. Rieder*: Der Beitrag des elastischen Feldes zur freien Energie nicht-elastischer Vorgänge. Materialprüf. **2** (1960), Nr. 11, S. 429.
- [39] *H. Schaefer*: Die Spannungsfunktionen einer Dyname. Abh. Braunschwg. Wiss. Ges. **7** (1955), S. 107.
- [40] *E. Sternberg* und *R. A. Eubanks*: On the Concept of Concentrated Loads and an Extension of the Uniqueness Theorem in the Linear Theory of Elasticity. Journ. Rat. Mech. Anal. **4** (1955), S. 135.
E. Sternberg: On Some Recent Developments in the Linear Theory of Elasticity. Structural Mechanics (Proc. First Symp. Naval Struct. Mech.), J. N. Goodier & N. J. Hoff ed., S. 48. Oxford—London—New York—Paris 1960.
- [41] *H. Franz* und *E. Kröner*: Zur Stabilität der *Guinier-Preston*-Zonen in Aluminium-Kupfer-Legierungen. Z. Metallkunde **46** (1955), S. 639.
- [42] *Jahnke-Emde*: Tafeln höherer Funktionen. Leipzig 1948.
- [43] *V. Volterra*: Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. Ann. Éc. Norm. Sup. (3) **24** (1907), S. 401.
- [44] *J. C. Maxwell*: Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus. Deutsch von B. Weinstein, 1. Band. Berlin 1883.
- [45] *W. Haack*: Differential-Geometrie, Teil I. Wolfenbüttel-Hannover 1948.
- [46] *V. L. Indenbom*: Teoremy vzaimnosti i funktsii vliianiia dlia tenzora plotnosti dislokazii i tenzora nesovmestnosti deformatsii. Dokl. Akad. Nauk SSSR **128**, No. 5 (1959), S. 906.
(*W. L. Indenbom*: Reziprozitätssätze und Einflußfunktionen für die Tensoren der Versetzungsdichte und der Inkompatibilität. Doklady Akad. Nauk SSSR **128** (1959), S. 906.)
- [47] *G. Rieder*: In Vorbereitung.